



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN Y TEOREMA DE  
NOETHER CON DERIVADAS FRACCIONARIAS  
CENTRADAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**Físico**

PRESENTA:

**Argel Ramírez Reyes**

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Jorge Fujioka Rojas



México, D.F., 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**1. Datos del alumno.**

Ramírez

Reyes

Argel

38 71 54 04

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

307211884

**2. Datos del Asesor.**

Dr.

Jorge

Fujioka

Rojas

**3. Datos del sinodal 1**

Dr.

Julio Javier

Martinell

Benito

**4. Datos del sinodal 2**

Dr.

Renela María

Valladares

Mc Nelis

**5. Datos del sinodal 3**

Dr.

Miguel

Ángel

Solís

Atala

**6. Datos del sinodal 4**

Dr.

Juan

Adrián

Reyes

Cervantes

**7. Datos del trabajo escrito**

Ecuaciones de Euler-Lagrange y teorema de Noether con derivadas fraccionarias centradas

70p

2016

*A Javier Páez Cárdenas  
A René Garduño López  
Gracias por las clases que más me hicieron feliz.  
Por ellas valió el camino.*



# Agradecimientos

---

Antes de llegar a la Facultad de Ciencias, hubo personas que guiaron y orientaron mi vida en algún momento: Mis queridos profesores de física, Felipe Radilla y Mario Cruz Terán que me ayudaron a descubrir lo apasionante de esta disciplina, les agradezco haberme presentado esta senda.

Para escribir un trabajo de titulación en la Facultad de Ciencias, primero se necesita haber sobrevivido poco más de 4 años en ella. Ésta difícil labor podría ser imposible sin la incommensurable ayuda de mis amigos que apoyaron en diversas labores:

A los actuarios: Rubén, Fernando, Jafet, Susana, Teté y Andy, quienes en contubernio con mis amigos ingenieros, Gina y Vladimir, supieron que salir de clases para compartir el tiempo y más de un par de ratos de relajo era más importante que algunas horas en el salón, gracias por facilitarme el tránsito.

A Majo, Aramis, Juan, Miguel y Fernando que, cuando fue necesario pasaron horas conmigo resolviendo tareas, programando divertimentos, discutiendo las complejidades del universo, parlotando sobre los asuntos más banales de la vida y a veces estuvieron dispuestos a pasarlos de copas para dejar salir de la inconsciencia las preocupaciones más escondidas y disfrutar duraderas veladas de música y chisme. Sin ustedes, sin duda, no hubiera llegado aquí.

Agradezco también a mis buenos profesores de la facultad, con quienes aprendí muchísimo y a los que debo nada más que gratitud: René Garduño, Roxana del Castillo, Javier Páez y sus inolvidables, Miguel Alcubierre con quien me hubiera gustado ser más cercano, Chumín Wang por las horas de sangre lágrimas y, finalmente, Víctor Romero y su inigualable exposición y a Pablo Rendón por el mejor y muy necesario curso de ondas, fluídos y música que tanto me divirtió. Ustedes reafirmaron la convicción que a veces flaqueaba.

Naturalmente, a quienes no se puede encasillar en un periodo tan pequeño: A Natalia, Ana y Cassandra, que llevan más años acompañándome aunque estos 4 años nos han alejado un poco. Siempre me vino bien su perspectiva, y siempre me resulta placentera su compañía. Gracias, niñas.

Sobre todo agradezco a las personas más importantes de mi vida: mis padres, Rodolfo y Patricia, a quienes debo lo que soy y en quienes veo lo que quiero ser. Su comprensión y apoyo sin límites me permiten dar cada paso difícil y me han ayudado a ver más claro el camino. A mis hermanos, Arlen y Gibrán, con quienes crecí y con quienes me formé. Nos parecemos y nos entendemos, pero también podemos ver más de cerca nuestros defectos, gracias por los regaños y por los cariños, por las pláticas y las horas de televisión. Gracias por las peleas, pero sobre todo gracias por el infinito amor.

Finalmente, Alejandra, mi esposa que me ha dado como el más grande obsequio, la decisión de compartir su vida con la mía. Agradezco infinitamente las risas que hemos compartido y todo lo que me ha hecho crecer. El mayor regalo de mi vida ha sido el amor que me ha dado. Al final de cuentas, por eso se debe de vivir.



# Índice general

---

<b>Portada</b>	<b>I</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>V</b>
<b>Índice</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. El principio de mínima acción y las ecuaciones de Euler-Lagrange</b>	<b>5</b>
2.1. Revisión histórica y enunciado . . . . .	5
2.2. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para lagrangianas dependientes de funciones de varias variables . . . . .	7
2.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange cuando la lagrangiana depende de funciones de varias variables y sus $n$ -derivadas . . . . .	9
2.4. Importancia de la formulación lagrangiana y el principio de mínima acción . . . .	10
2.5. Solitones . . . . .	11
2.5.1. Ecuaciones de onda no lineales . . . . .	12
2.5.2. Ecuaciones que dan lugar a solitones . . . . .	13
2.5.3. Solitones ópticos en las telecomunicaciones . . . . .	14
2.6. Ejemplo: lagrangiana para la ecuación NLS . . . . .	14
<b>3. El teorema de Noether</b>	<b>17</b>
3.1. El teorema de Noether . . . . .	18
3.2. Enunciado equivalente tras un cambio de coordenadas . . . . .	20
3.3. Condición equivalente de invariancia . . . . .	20
3.4. Prueba de la existencia de cantidades conservadas . . . . .	21
<b>4. Derivadas fraccionarias</b>	<b>25</b>
4.1. Presentación de la idea y breve exploración histórica . . . . .	25
4.1.1. Ecuaciones diferenciales fraccionarias en la física . . . . .	26
4.2. Definición y algunas propiedades de las derivadas fraccionarias de Grünwald-Letnikov . . . . .	27
4.2.1. Propiedades . . . . .	28
4.3. Sistemas no lineales de Schrödinger generalizados y fraccionarios . . . . .	29



<b>5. Derivadas fraccionarias centradas</b>	<b>31</b>
5.1. Motivación y definición de las derivadas fraccionarias centradas de Duarte-Ortigueira	31
5.2. Propiedades de las derivadas fraccionarias centradas . . . . .	33
5.2.0.1. Condiciones para la satisfacción de las igualdades recién probadas	34
5.3. Ejemplo de aplicación . . . . .	35
<b>6. Ecuaciones de Euler - Lagrange para derivadas fraccionarias centradas</b>	<b>39</b>
6.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange para lagrangianas que dependen de una función de dos variables independientes y sus derivadas enteras y fraccionarias . . . . .	39
6.2. Aplicación para una ecuación tipo NLS . . . . .	40
6.2.1. Sistema NLS fraccionario . . . . .	41
6.2.2. Una lagrangiana para un sistema descrito en términos de derivadas fraccionarias centradas . . . . .	41
<b>7. Teorema de Noether fraccionario</b>	<b>45</b>
7.1. Punto de partida . . . . .	45
7.2. Enunciado y demostración . . . . .	46
7.3. Aplicación del teorema para una lagrangiana que produce una ecuación NLS extendida fraccionaria . . . . .	49
7.3.1. Ejemplo 1: Transformaciones de norma . . . . .	49
7.3.2. Ejemplo 2: traslaciones en $z$ . . . . .	51
7.3.3. Ejemplo 3: traslaciones en $t$ . . . . .	53
7.3.4. Resumen de resultados . . . . .	55
<b>8. Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>Apéndice</b>	<b>59</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>63</b>

---

# Capítulo 1

## Introducción

---

In theoretical physics a theory is often considered to be complete if its variational principle in the sense of Hamilton is known.

---

Anthony, K.H. [1]

La física teórica cuenta entre sus pilares más notables con dos herramientas: el principio de mínima acción y el teorema de Noether.

El primero de estos pilares (el principio de mínima acción) es una herramienta que puede rastrearse al siglo XVII pero que fue desarrollado con la mayor formalidad matemática en el siglo XIX por Rowan Hamilton [2]. Este principio expresa la idea de que los sistemas de la naturaleza, al evolucionar, lo hacen de forma que algunas cantidades medibles (o calculables) se mantienen en, o tienden a su valor mínimo o máximo, este teorema puede enunciarse de la siguiente forma [3]:

**Teorema 1.** *Si un sistema físico se caracteriza por una función determinada (llamada función lagrangiana)*

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \tag{1.1}$$

donde  $q$  es el conjunto de las coordenadas generalizadas del sistema,  $\dot{q}$  sus derivadas respecto al tiempo y  $t$  el tiempo mismo y el estado del sistema está determinado entre un tiempo inicial  $t_1$  y uno final  $t_2$ , entonces el sistema evolucionará de forma que la integral (a la que se le llama “acción”)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \tag{1.2}$$

tenga el mínimo valor posible.

Por su origen, al inicio, la aplicación de esta idea fue exitosa en los sistemas mecánicos. Sin embargo, posteriormente comenzó a observarse la posibilidad de extender su uso, logrando establecerse como núcleo en las formulaciones de la mecánica cuántica, óptica y una parte fundamental en construcciones como la teoría cuántica de campos.

Como se puede observar, la importancia del principio de mínima acción no es sólo práctica, pues además de facilitar la descripción de muchos sistemas físicos, hace evidente una estrechísima relación entre las matemáticas, totalmente abstractas (como el cálculo de variaciones, que es el área que resuelve problemas como la minimización de cantidades que dependen de funciones) y los sistemas físicos que se habían estudiado desde hace siglos.

Pero el éxito de esta idea no hubiera sido tal si no hubiera existido Emmy Noether, mujer que, no conforme con romper los esquemas sexistas de la comunidad científica del siglo XIX (al ser de las primeras mujeres en obtener un doctorado y una plaza de catedrática en una universidad), revolucionó áreas como el álgebra abstracta y el cálculo de variaciones. Esta última área ha sido la que le ha dado gran relevancia en la física teórica.

En su trabajo fundamental en esta área [4], utiliza que un sistema físico debe cumplir el principio de mínima acción, para demostrar una relación entre las leyes de conservación de la naturaleza (conocidas previamente por mucho tiempo) y ciertas simetrías de la función que describe el sistema. La evidencia de dicha relación ha hecho posible que en muchas áreas baste un análisis matemático totalmente abstracto para predecir el comportamiento del sistema o incluso la existencia de nuevas entidades físicas (ver, por ejemplo [5, 6, 7]). El teorema puede enunciarse de forma abreviada así (se omite la formalidad matemática, en la que se abundará en el Capítulo 3):

**Teorema 2.** *A cada transformación continua de “coordenadas” que deja invariante la acción de un campo físico, le corresponde una ley de conservación.*

El teorema de Noether ha sido exitosamente aplicado en muchas áreas de la física. Sin embargo, no todo está hecho. En el último siglo ha aumentado el uso de ciertos objetos matemáticos llamados “derivadas fraccionarias”. Estos objetos son la respuesta a la pregunta ¿Qué significaría que en el símbolo  $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$  el número  $n$  pudiera tomar valores no enteros? hecha desde los albores del cálculo diferencial en una plática entre L’Hopital y Leibniz [8, 9]. En este caso, la respuesta no ha sido única, pues desde que se formuló, los matemáticos han encontrado muchas formas de darle sentido a dicha expresión y no todas son equivalentes.

Algunas de las formas de responder a la pregunta, hacen uso de una generalización de un método para expresar una integral de orden arbitrario  $n$  (es decir, integrar  $n$  veces una función) y de la interpretación de la integral como operación “opuesta” a la derivación. Lo que hacen las ideas de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y de Caputo, puede verse, tomando como ejemplo una derivada de orden  $1/2$ , como “derivar una vez” una función integrada “media vez” o usar esas operaciones en orden inverso. En otras propuestas, como la de Grünwald-Letnikov, se generaliza la expresión de la derivación como un límite de diferencias finitas.

El uso de derivadas fraccionarias en sistemas físicos es aún bastante limitado, pero su uso ha aumentado considerablemente en las últimas décadas, hallándose especialmente en sistemas “con memoria”, en la ciencia de materiales, o en fenómenos descritos de forma estadística, como procesos subdifusivos o superdifusivos [10].

Entre las aplicaciones del cálculo fraccionario en la física sobresalen los esfuerzos por extender la validez del principio de mínima acción y del teorema de Noether a sistemas descritos por lagrangianas que involucran derivadas fraccionarias.

Como ejemplos de dichas generalizaciones, podemos mencionar los teoremas de Noether hallados para derivadas de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville o Caputo (ver, como ejemplos [11, 12, 13]). Existe, sin embargo, una clase relativamente nueva de derivadas fraccionarias propuesta en 2012 por Manuel Duarte Ortigueira [14], que se diferencia de las otras en que no dependen de una “dirección” específica con respecto al punto de evaluación. Esta propuesta es semejante a la de las derivadas de Grünwald-Letnikov, pero formula el cociente de diferencias

---

de forma que se tomen en cuenta valores hacia ambos lados del punto de evaluación.

Para éstas, llamadas derivadas fraccionarias centradas, no existía hasta ahora una formulación del teorema de Noether ni del principio de mínima acción. Según el creador de estos operadores, la utilidad de las derivadas fraccionarias centradas puede esperarse en problemas que espacialmente no dependen específicamente de una dirección, y que no pueden ser descritas mediante derivadas enteras y ni con los otros tipos de derivada fraccionaria [15].

La pregunta que se intenta responder en este trabajo es, entonces: ¿Se puede hallar una extensión del principio de mínima acción y del teorema de Noether para sistemas físicos que pueden ser descritos mediante una formulación variacional por funciones de varias variables y de sus derivadas enteras y fraccionarias centradas?

La respuesta a la pregunta anterior puede generar nuevas herramientas para el estudio de sistemas físicos que se puedan describir por estas derivadas fraccionarias centradas. Se han hallado sistemas de este tipo que son interesantes pues, por ejemplo, permiten la descripción de solitones ópticos (fenómenos ondulatorios no lineales que no se observan en todos los medios). Es justamente el tema de los solitones ópticos un ejemplo muy útil, pues sirve para ilustrar la utilidad de las herramientas de la física variacional y también del campo de las derivadas fraccionarias. Ecuaciones que tienen solitones como solución se han encontrado en las áreas que se han descrito en este trabajo.

En estricto sentido, un solitón óptico es una onda solitaria no lineal que, conserva su forma (no se dispersa) y la recupera después de interactuar brevemente incluso con otros solitones. Los solitones en agua fueron observados por primera vez en 1834 por Scott Russell, quien observó y persiguió una onda con esas características en un canal en Escocia [16].

Matemáticamente, hay múltiples ecuaciones no lineales que dan lugar a solitones. Como casos particulares podríamos mencionar a la ecuación de Kortweg de Vries y a la ecuación no lineal de Schrödinger [17], que se presenta a continuación:

$$iu_z + \frac{1}{2}u_{tt} + \|u\|^2u = 0 \quad (1.3)$$

En esta ecuación  $u_t$  representa la primera derivada de  $u$  respecto a  $t$ ,  $u_z$  es la primera derivada de  $u$  respecto a  $z$  y, al repetir el subíndice, se indican derivadas de orden superior. Esta notación se respetará a lo largo de este trabajo.

Es importante mencionar que aunque en la ecuación de Schrödinger usada en mecánica cuántica la derivación de orden dos es en las variables espaciales, mediante el laplaciano, y sólo se deriva una vez en la variable espacial, esta ecuación recibe el nombre de ecuación no lineal de Schrödinger por tener una estructura similar.

Como se puede observar, la ecuación 1.3 tiene como variable de evolución a  $z$ , que corresponde a la longitud recorrida en una fibra óptica. Además cuenta con un término dispersivo y un término no lineal cúbico. Sin embargo, pueden existir extensiones a esta ecuación que contengan términos dispersivos de orden mayor o no linealidades de grado mayor. Se ha hallado que estas extensiones también pueden tener soluciones con forma de solitón cuando hay derivadas de orden 3 o 4 con respecto al tiempo [18] y, esto sugiere que si se sustituye esta derivada por una fraccionaria de orden intermedio, también podría haber solitones. Jorge Fujioka halló estos solitones fraccionarios utilizando las derivadas de Grünwald-Letnikov [19] y Manuel Velasco los halló para las derivadas de Manuel Duarte Ortigueira [20]. Esto hace del ejemplo de los solitones una situación ideal para explorar la física de los sistemas fraccionarios descritos en términos de las derivadas de Duarte Ortigueira.

El trabajo está dividido en 7 capítulos, correspondiendo el primero de ellos a esta introducción.

En los Capítulos 2 y 3 se da una introducción a las herramientas matemáticas que revolu-

cionaron la física, y cuyos resultados se tratan de extender en este trabajo. Particularmente, el Capítulo 2 trata del principio de mínima acción, y ofrece la obtención de las ecuaciones de Euler-Lagrange en algunos casos. El Capítulo 3, por su parte, trata sobre el teorema de Noether, y ofrece la demostración de una versión menos general que el teorema original.

En los Capítulos 4 y 5 se realiza una revisión de los conceptos de derivadas fraccionarias, y posteriormente se presenta el caso particular de las derivadas fraccionarias centradas.

El Capítulo 6 presenta la búsqueda de ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas descritos por funciones de varias variables y sus derivadas de orden entero y fraccionarias centradas, y el Capítulo 7 presenta la búsqueda equivalente para el teorema de Noether.

Finalmente, en el Capítulo 8 se presentan las conclusiones del trabajo y se hace una breve discusión sobre su alcance y su validez.

Adicionalmente, se presenta (con el objeto de tener un ejemplo que sirva de hilo conductor y que justifique la pertinencia del trabajo desde el punto de vista de un problema de la física) desde el Capítulo 2, el tema de los solitones ópticos, y se utiliza la ecuación no lineal de Schrödinger [17] para presentar una ecuación deducible a partir de una función lagrangiana. En los Capítulos 2, 4, 6 y 7, se sigue este ejemplo, mostrando extensiones a esa ecuación y usando las herramientas expuestas en cada Capítulo, para estudiarla.

Con lo relizado a lo largo de esta tesis, se concluye que es posible hallar las formulaciones buscadas. Sin embargo, se debe dejar para trabajo futuro la búsqueda de otros sistemas reales que muestren que la aplicación de estas nuevas herramientas aporta beneficios, es decir, sería interesante encontrar más ejemplos en los cuales el uso de las nuevas derivadas fraccionarias centradas dé mejores resultados que el uso de derivadas fraccionarias “izquierdas” y “derechas” o el uso de derivadas de orden entero.

# El principio de mínima acción y las ecuaciones de Euler-Lagrange

---

Los físicos han tenido desde hace mucho la visión de que las teorías físicas alcanzan su belleza máxima cuando están dadas en términos de principios variacionales.

---

Robert Hermann

Se inicia el presente trabajo dando una revisión de ciertas herramientas necesarias para entender los procedimientos esenciales. La primera de las herramientas revisadas es el principio de mínima acción, y sus correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange. Adicionalmente, se da una breve revisión de los solitones ópticos. Esto dará pie, en este y otros capítulos, a una serie de ejemplos guían la motivación de este trabajo en un área de la física. La estructura de este capítulo es la siguiente:

- Revisión histórica y enunciado del principio de mínima acción
- Las ecuaciones de Euler-Lagrange para lagrangianas dependientes de funciones de varias variables
- Ecuaciones de Euler-Lagrange cuando la lagrangiana depende de funciones varias variables y sus  $n$ -derivadas
- La importancia de la formulación lagrangiana y ejemplos.
- Breve revisión de ondas solitarias (Solitones)

## 2.1. Revisión histórica y enunciado

Históricamente, se puede ubicar el desarrollo de la mecánica clásica en dos etapas: Por un lado está la perspectiva newtoniana, que explica la evolución de un sistema a partir de relaciones entre cantidades vectoriales como la fuerza y el momento. Esta relación se ve claramente en la segunda ley de Newton, que relaciona la fuerza con el cambio en el tiempo del momento lineal de una partícula puntual. El otro enfoque es el defendido por un contemporáneo de Newton. Leibniz explicaba la evolución de un sistema físico observando las relaciones entre cantidades escalares como a la energía cinética (a la que llamaba *vis viva*) [21]. Esta última forma de ver a los sistemas físicos es una característica fundamental de lo que ahora se conoce como

mecánica analítica. La mecánica analítica tiene, además, como ingrediente estelar un principio que, aunque no la acompañó durante su nacimiento, sirvió para sintetizar ideas presentadas a lo largo de siglos de historia y constituye uno de los grandes saltos en el pensamiento humano: El principio de mínima acción.

El principio de mínima acción es una forma de expresar la idea de que la naturaleza, en su actuar, lo hace de forma que ciertas cantidades varíen en forma máxima o mínima. Formalmente, este principio (Enunciado por Rowan Hamilton en el siglo XIX [2]) indica que:

1. Cada sistema mecánico tiene asociada una función  $L$  (función lagrangiana) que depende de sus coordenadas generalizadas, sus derivadas con respecto al tiempo y el tiempo mismo:

$$L = L(q(t), \dot{q}(t); t) \quad (2.1)$$

donde  $q(t) := \{q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)\}$  se refiere al conjunto de las  $n$  coordenadas generalizadas del sistema,  $\dot{q}(t) := \{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t)\}$  al de sus derivadas temporales y  $t$  al tiempo.

2. Si el sistema ha de evolucionar entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , entonces las coordenadas  $q(t)$  por las que evolucionará el sistema deben ser tales que la integral (a la que se denomina acción por motivos históricos):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t); t) dt \quad (2.2)$$

debe tomar el mínimo valor posible [3].

Es importante mencionar que en la mecánica analítica, la trayectoria no es una curva en el espacio tridimensional, más bien una curva en un espacio multidimensional donde cada punto corresponde al estado de todo el sistema en un instante, aún cuando el sistema esté compuesto de muchas partículas.

Sobre la dependencia temporal, algunos autores, como Lanczos [21] o Sommerfeld [22] consideran que la dependencia explícita del tiempo hace esencialmente diferente el principio que mencionamos (al que llaman principio de Hamilton) de lo que se conoce como el “Principio de mínima acción” que es la forma en que fue enunciada la idea por Euler y Lagrange. En este texto no hacemos dicha distinción.

La idea de que la naturaleza “optimiza” ciertas cantidades no se presentó por primera vez en el siglo XIX, ya antes había sido utilizada por Pierre de Fermat en el siglo XVII para describir la trayectoria de un haz de luz, y por Pierre Louis Moreau de Maupertius en el XVIII [2] en el ámbito de la mecánica, aunque de una forma menos general que la de Hamilton (en el principio de Maupertuis no se considera la variable temporal, y sólo se minimiza la acción entre aquellas trayectorias que tienen la misma energía  $E$ ).

Una característica del principio de mínima acción aplicado a los sistemas mecánicos es que la función lagrangiana sólo depende del tiempo, de las coordenadas generalizadas y de sus primeras derivadas con respecto al tiempo. Esto tiene relación con que las leyes fundamentales de la mecánica (las leyes de Newton) describen la evolución de un sistema con sólo la segunda derivada con respecto al tiempo de la posición (de ahí que la segunda ley de Newton se puede expresar como  $F = m\ddot{x}$ ). Sin embargo, si volvemos la atención al ejemplo de Fermat podemos hallar natural que sistemas no mecánicos se puedan describir mediante una formulación similar que puede depender de derivadas de orden mayor, e incluso de más variables independientes.

El principio que acabamos de describir tiene como ventaja que facilita la resolución de la dinámica de muchos sistemas físicos que antes eran difíciles. Para lograr esa ventaja, es importante conocer las ecuaciones de Euler-Lagrange, que es un conjunto de ecuaciones diferenciales obtenidas después de considerar las implicaciones del principio de mínima acción. A partir de este momento nos concentraremos en buscarlas.

## 2.2. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para lagrangianas dependientes de funciones de varias variables

El principio de mínima acción, tal como fue enunciado nos presenta el siguiente problema: ¿Cómo hallar la función que minimice la integral de acción? Este problema da pie a la rama llamada cálculo de las variaciones [23]. Para resolver la cuestión, intentaremos observar qué debería cumplir la integral de acción para que su valor fuera mínimo o máximo. Comencemos recordando que en el cálculo diferencial de variables reales, es característico de los máximos o mínimos locales de una función diferenciable, que la derivada, evaluada en esos puntos, es cero. Intentemos ver cómo esa condición puede expresarse en el caso de la integral de acción.

En el caso expuesto anteriormente, tanto las coordenadas generalizadas  $q(t)$  como sus derivadas temporales  $\dot{q}(t)$  son funciones que dependen solamente del tiempo. Se puede considerar ahora un sistema en el que las funciones que describen al sistema dependen de varias variables reales independientes. Entonces podemos considerar una lagrangiana de la siguiente forma (a esta función se le llama densidad lagrangiana y el salto que acabamos de dar es el salto a las teorías clásicas de campo):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(z, t), q_t(z, t), q_z(z, t); t; z) \quad (2.3)$$

donde  $q_z(z, t)$  y  $q_t(z, t)$  son los conjuntos de las derivadas con respecto a  $z$  y a  $t$ , respectivamente (esta notación se utilizará más adelante en el mismo sentido).

Con esta densidad lagrangiana y el sistema evolucionando en un dominio rectangular  $[t_1, t_2] \times [z_1, z_2]$  la condición del principio de mínima acción se refiere ahora a la siguiente integral:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{L}(\{q(z, t)\}, \{q_t(z, t)\}, \{q_z(z, t)\}; t; z) dz dt \quad (2.4)$$

Esta integral debe tomar un valor extremal para la trayectoria en que evolucionará realmente el sistema, esto es, para cualquier trayectoria ligeramente diferente a la trayectoria real, la integral debe incrementar su valor.

Siguiendo un proceso similar al realizado en [3], tomando en cuenta un sólo grado de libertad del sistema, consideremos una familia de funciones de la forma:

$$q(z, t, \alpha) = q^*(z, t) + \alpha \delta q(z, t) \quad (2.5)$$

donde  $q^*(z, t)$  será la función para la cuál  $S$  tenga un mínimo,  $\delta q(z, t)$  es una función diferenciable “pequeña” (según alguna métrica asociada al espacio de funciones en que se trabaje, por ejemplo, la distancia euclidiana si las coordenadas corresponden a las coordenadas cartesianas) y  $\alpha$  un parámetro real.



De la definición anterior podemos observar que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial \alpha}(z, t) &= \delta q(z, t) \\ q_z(z, t, \alpha) &= q_z^*(z, t) + \alpha(\delta q(z, t))_z \\ q_t(z, t, \alpha) &= q_t^*(z, t) + \alpha(\delta q(z, t))_t\end{aligned}\tag{2.6}$$

Las últimas dos expresiones tienen la misma estructura que (2.5), por lo que también se tiene que:

$$\begin{aligned}\delta(q_z(z, t)) &= (\delta q(z, t))_z \\ \delta(q_t(z, t)) &= (\delta q(z, t))_t\end{aligned}\tag{2.7}$$

Con las consideraciones anteriores, y como la lagrangiana está integrada sobre un dominio bien definido, la integral de acción es sólo función del parámetro  $\alpha$ :

$$S = S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{L}(q(z, t), q_t(z, t), q_z(z, t); t; z; \alpha) dz dt\tag{2.8}$$

De forma que la condición de extremalidad de  $S$  implica ahora que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} S(\alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{L}(q(z, t), q_t(z, t), q_z(z, t); t; z; \alpha) dz dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{L}(q(z, t), q_t(z, t), q_z(z, t); t; z; \alpha) dz dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t} \frac{\partial q_t}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_z} \frac{\partial q_z}{\partial \alpha} \right] dz dt \\ &= 0\end{aligned}$$

Observando (2.6) y (2.7) la ecuación anterior queda como:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t} (\delta q)_t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_z} (\delta q)_z \right] dz dt = 0\tag{2.9}$$

Separando esta expresión en dos integrales y cambiando un orden de integración en el primer miembro (lo que no supone un problema puesto que el dominio es rectangular), tenemos la siguiente integral:

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t} (\delta q)_t \right] dt dz + \int_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_z} (\delta q)_z dz dt = 0\tag{2.10}$$

Observemos el primer miembro de la suma. Al integrar por partes el segundo elemento dentro de la integral tenemos:

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t} (\delta q)_t \right] dt dz =$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t} dt \right] dz$$

El término medio de esta suma es cero pues  $\delta q(z, t_1) = \delta q(z, t_2) = 0$ . Veamos ahora la segunda integral de la expresión (2.10), que tiene la forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_z} (\delta q)_z dz dt$$

Integrando por partes nuevamente tenemos que este término se vuelve:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_z} \delta q \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \delta q \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_z} dz \right] dt \quad (2.11)$$

En la última expresión el primer término es cero pues  $\delta q(z_1, t) = \delta q(z_2, t) = 0$ . Finalmente, si juntamos las dos partes, tenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_z} \right] \delta q dz dt = 0 \quad (2.12)$$

Como no se exigieron condiciones muy restrictivas para  $\delta q$ , salvo que sea pequeña, el término entre corchetes debe ser cero, de modo que la condición de que la integral de acción  $S$  alcance un valor extremo, implica que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_z} = 0 \quad (2.13)$$

Esta se conoce como la ecuación de Euler-Lagrange cuando la función lagrangiana depende de funciones con varias variables independientes y de sus primeras derivadas y es de suma importancia en la física teórica. Para nuestros fines es importante remarcar que lo que hemos hecho es hallar condiciones que la lagrangiana debe cumplir en la trayectoria que minimiza la acción. Ahora intentemos obtener un resultado un poco más general.

### 2.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange cuando la lagrangiana depende de funciones de varias variables y sus $n$ -derivadas

Si suponemos que la función lagrangiana depende también de la segunda derivada de  $q$  respecto de  $z$ , la expresión (2.11) tiene además el término

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{zz}} \frac{\partial q_{zz}}{\partial \alpha} dz dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{zz}} (\delta q)_{zz} dz dt$$

que, al integrar por partes se vuelve:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{zz}} (\delta q)_z \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{zz}} (\delta q)_z dz \right] dt$$

donde el primer término es cero. Al integrar por partes el segundo término tenemos que esto es:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{zz}} (\delta q)_z \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{zz}} (\delta q) dz \right] dt$$

vemos que, siempre que se cumpla que

$$(\delta q) \Big|_{z_1}^{z_2} = (\delta q)_z \Big|_{z_1}^{z_2} = \dots (\delta q)_{nz} \Big|_{z_1}^{z_2} = 0$$

en el cómputo final se tendrá, para la derivada de orden  $n$  en la variable  $z$ , el término

$$(-1)^n \int_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{nz}} (\delta q) dz dt$$

por lo que extendemos nuestro resultado de la siguiente forma:

Para una lagrangiana dependiente de funciones de varias variables y sus derivadas, el principio de mínima acción implica que: Si  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(z, t), q_z, q_{zt}, \dots, q_{mz}, q_{nt})$  y entonces se debe cumplir que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_z} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t} + \sum_{i=2}^m (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial z^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{iz}} + \sum_{j=2}^n (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{jt}} = 0 \quad (2.14)$$

## 2.4. Importancia de la formulación lagrangiana y el principio de mínima acción

No es el objetivo del presente texto tratar la mecánica analítica aunque, por motivos de claridad, hemos de hacer breve mención de algunos problemas cuya resolución es facilitada por el formalismo recién visto.

Si consideramos el conocido problema del péndulo simple en dos dimensiones podemos observar que el movimiento se realiza sobre una circunferencia, es decir, una estructura unidimensional debería bastar para describir su movimiento. La mecánica newtoniana en su forma elemental, sin embargo, requiere descomponer para cada instante del tiempo el movimiento en dos componentes perpendiculares si no se quiere pasar por un tortuoso cambio de coordenadas. La formulación lagrangiana, por otro lado, nos permite introducir de forma natural un sistema de coordenadas polares que permite resolver la dinámica del sistema con una sólo ecuación diferencial ordinaria de primer grado.

Como otro ejemplo podemos considerar el movimiento de un bloque sobre un plano inclinado. De igual forma, si exploramos el sistema con una perspectiva newtoniana debemos, para cada tiempo, integrar un par de ecuaciones diferenciales. Si nos atenemos a las bondades de la

mecánica lagrangiana podemos proponer una coordenada generalizada. Como consecuencia de tener una restricción en el movimiento (el plano inclinado), podemos describir este sistema con una sólo ecuación diferencial y evitar la mitad del trabajo.

Este par de ejemplos triviales muestran la utilidad de la formulación lagrangiana, pero esto es sólo lo inmediatamente visible. De hecho, la forma de ver el universo que hemos establecido tiene implicaciones mucho más profundas. Las herramientas que recién hemos desarrollado no son sólo una forma alternativa de describir la mecánica de los sistemas newtonianos, son también el testimonio de un salto gigantesco en la forma de ver al mundo.

La unión de ideas totalmente abstractas con resultados tangibles halla en el desarrollo de la mecánica lagrangiana un nicho dónde expresarse como no se había visto antes. El abandono de la necesidad de un sistema rectangular de coordenadas atestigua la generalidad del método y su innegable utilidad, mientras que la elegancia de la idea nos muestra la estrecha relación entre las matemáticas y la existencia física. La abstracción del método fue necesaria históricamente para que el concepto de campo físico entrara de lleno al desarrollo de la física teórica y este concepto es el pilar fundamental de la visión que se tiene actualmente de la naturaleza del universo.

Los métodos que estamos usando trascienden a la mecánica, pues a lo largo de la historia se han observado más sistemas cuya evolución puede ser descrita a partir de un principio variacional y de un sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange. Entre las áreas que se han beneficiado de tal hecho podemos hallar la óptica no lineal, la mecánica cuántica, la relatividad y la electrodinámica cuántica. Estas últimas teorías aprovechan la generalización de la formulación lagrangiana a una teoría de campos.

Aunque acabamos de observar un gran salto conceptual, nuestro camino ha de hacer una siguiente parada, pues pareciera que la utilidad de la mecánica lagrangiana es sólo cambiar las matemáticas necesarias para hacer, en esencia, lo mismo que podíamos hacer con la mecánica de Newton.

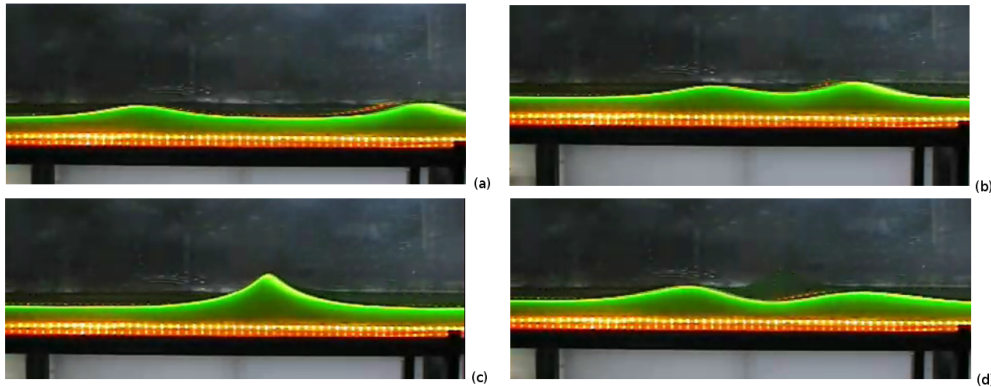
En el siguiente capítulo veremos otra poderosa herramienta matemática que nos ha de ayudar a desentrañar características físicas de los sistemas que a primera vista no son evidentes, pero antes de eso pasaremos a revisar un tema que nos servirá para justificar y guiar este trabajo en el contexto de un área específica de la física.

## 2.5. Solitones

Se llama solitón a una onda solitaria que es capaz de propagarse por un medio dispersivo no lineal sin dispersarse (o cambiar su forma), y que recupera su forma aún después de diferentes colisiones. El nombre de “solitón” fue acuñado en la segunda mitad del siglo XX y es una mezcla del concepto de “onda solitaria” con la terminación típica de los nombres de las partículas. Aunque esta descripción tiene menos de cien años, la existencia de solitones fue descrita por primera vez en 1834 por John Russel Scott [16, 24] quien describió una “gran elevación solitaria” o “un chipote en el agua de un canal” (al que él llamó al fenómeno “onda de traslación” y no solitón) que se movía a gran velocidad y recorrió el canal sin cambiar de forma ni disminuir su velocidad (En la figura 2.1 se puede observar una secuencia de imágenes de un fenómeno similar).

Estos fenómenos pueden presentarse en otro tipo de medios no hidráulicos, por ejemplo, los ópticos.

**Figura 2.1:** Fenómeno recreado en el “Laboratoire Interdisciplinaire CARNOT de Bourgogne, Équipe Solitons, Laser et Communications optiques”, capturas obtenidas del video: <https://www.youtube.com/watch?v=wEbYELtGZwI>



### 2.5.1. Ecuaciones de onda no lineales

Observemos primero cómo se obtiene una ecuación no lineal con soluciones ondulatorias. Para obtener, desde las leyes de la física, la conocida ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (2.15)$$

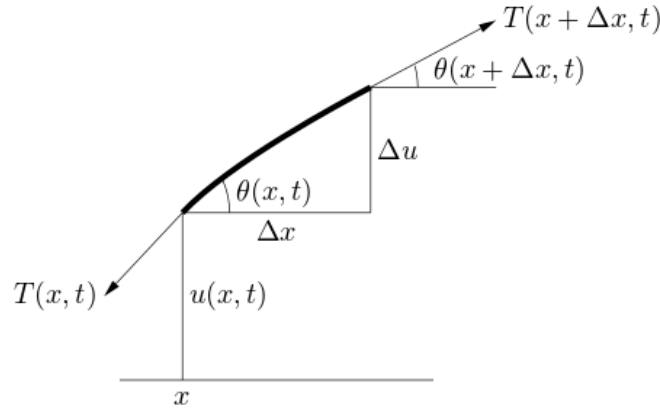
En esta ecuación  $u(x, t)$  es una perturbación en alguna propiedad del sistema en cuestión que depende de las variables  $x$  y  $t$ . Al plantear matemáticamente el problema, es necesario, hacer simplificaciones en la descripción del sistema. Por ejemplo, en el caso de las vibraciones de una cuerda de guitarra (ver figura 2.2) se considera que la amplitud de la perturbación es lo suficientemente pequeña para que  $\theta \ll 1$  y, por tanto,  $\tan(\theta) \approx \sin(\theta) \approx \theta$ , lo que permite llegar a la ecuación (2.15).

Este tipo de simplificaciones llevan a ecuaciones lineales que obedecen, por ejemplo, el principio de superposición (o sea que la suma de dos soluciones necesariamente es solución) y en muchos casos facilitan los procedimientos. Sin embargo, si es imposible considerar válida alguna de las aproximaciones (e.g. si en el caso de la cuerda la amplitud fuera visiblemente grande) se puede obtener otro tipo de ecuaciones que contengan productos u otras operaciones entre la perturbación y sus derivadas. Dichas ecuaciones darán lugar (si acaso) a fenómenos ondulatorios que, en general, no obedecen el principio de superposición.

Por otro lado una perturbación “bien comportada”, puede, en general, ser descrita como la suma de componentes con diferentes frecuencias. En sistemas que no son tan simplificables, se puede hallar que componentes con diferente frecuencia se propagan con distinta velocidad en el mismo medio (cosa que no sucede en la ecuación (2.15)), a estos fenómenos se les llama dispersivos.

Si se considera lo anterior, se puede observar que no es un resultado inmediato para medios descritos por ecuaciones diferenciales no lineales, la existencia de pulsos que no se “deforman” en su desplazamiento y que resisten a colisiones con elementos del medio u otras ondas solitarias.

**Figura 2.2:** Esquema de una cuerda que estirada que, bajo ciertas consideraciones, da lugar a la ecuación (2.15), recuperado de <http://www.math.ubc.ca/~feldman/m256/wave.pdf> el día 12 de noviembre de 2015 a las 23:20



### 2.5.2. Ecuaciones que dan lugar a solitones

Entre las ecuaciones que dan lugar a solitones, podemos encontrar la ecuación de Korteweg-de Vries (o KdV, que fue la primera que explicó el fenómeno observado por Russel [25]):

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0 \quad (2.16)$$

la ecuación KdV generalizada:

$$u_t + u_{xxx} + (u_x)^p = 0 \quad (2.17)$$

con  $p$  un exponente positivo, y la ecuación “tipo” no lineal de Schrödinger:

$$iu_z + \frac{1}{2}u_{tt} \pm \|u\|^2u = 0 \quad (2.18)$$

entre otras. Notemos que todas estas son ecuaciones no lineales y es justamente el balance entre el término dispersivo y el término no lineal el que da lugar a la existencia de solitones.

La ecuación (2.18) tiene aplicaciones muy importantes en la óptica y, aunque el nombre pudiera engañar al lector, no tiene relación con la óptica cuántica, pues puede deducirse de las ecuaciones de Maxwell para medios dieléctricos no magnéticos, como se puede ver en [17]. Se hace la distinción “tipo” sólo en ésta ocasión pues la ecuación de Schrödinger usada en mecánica cuántica tiene las segundas derivadas en la parte espacial y sólo derivadas de orden uno en la parte temporal. Por compartir la estructura general de la ecuación de Schrödinger, sin embargo, usaremos el mismo nombre para la aquí utilizada. En la siguiente sección, se mostrará lo importante que es actualmente la ecuación NLS.

### 2.5.3. Solitones ópticos en las telecomunicaciones

Las capacidades de transmisión de información a través de fibras ópticas, y sus ventajas con respecto a los sistemas de cables metálicos, quedan claras si se considera que, cuando en los años 80, las fibras ópticas representaban el 0% [26] de los medios de transporte de datos, actualmente alrededor del 99% de los datos transmitidos en el mundo, viajan a través de cables submarinos de fibras ópticas de vidrio [27]. Sin embargo, la necesidad de incrementar la capacidad de transmisión de datos en este medio es gigantesca, lo cual ha obligado a, entre otras cosas, buscar nuevas formas de aumentar la capacidad de datos en cada señal y a aumentar la distancia en la cual una señal puede ser transmitida sin necesidad de ser corregida por aparatos intermedios (cuando la señal ha sido degradada por la dispersión o la atenuación, por ejemplo). Entre las ideas que han surgido naturalmente en busca de resolver esas cuestiones, podemos hallar el uso de solitones ópticos como portadores de información [28, 29]. Para darnos una idea de cómo se introdujo este fenómeno al área de las telecomunicaciones, hagamos un breve repaso histórico.

Históricamente, podemos hallar un artículo de 1973 firmado por Hasegawa y Tappert [30] que presentaba una ecuación que describía la transmisión de pulsos de duración de picosegundos en fibras ópticas, esta ecuación se parece a la ecuación NLS pero no es la misma. En 1980 Mollenauer, Stolen y Gordon [31] hallaron que la ecuación correcta para describir a dichos pulsos era justamente la ecuación (2.18), esto fue posible gracias a que, entre otras circunstancias, la construcción de fibras ópticas con vidrio más puro, permitió construir fibras que facilitaban el estudio y su posterior uso. Anteriormente se había hallado que la ecuación NLS podía ser resuelta por los mismos métodos que la ecuación KdV lo que, sumado a otras similitudes, sugirió la posibilidad de la existencia de solitones ópticos entre las soluciones de dicha ecuación [17]. Aunque la posibilidad teórica estaba dada, fue hasta el trabajo de Mollenauer y compañía que la existencia de solitones en las fibras ópticas se hizo una realidad.

### 2.6. Ejemplo: lagrangiana para la ecuación NLS

Mostremos ahora, como un ejemplo, que la ecuación NLS puede obtenerse de una lagrangiana. La ecuación NLS, tomando el signo positivo para el término no lineal es:

$$iu_z + \frac{1}{2}u_{tt} + \|u\|^2u = 0 \quad (2.19)$$

Proponemos ahora la siguiente lagrangiana:

$$\mathcal{L} = i(wu_z^* - u_t u^*) + u_t u_t^* - (wu^*)^2 \quad (2.20)$$

donde nuevamente se  $u_z$  se refiere a la derivada de  $u$  respecto de  $z$ ,  $u_t$  se refiere a la derivada de  $u$  respecto a  $t$ , e introducimos  $u^*$  como la notación para el complejo conjugado de  $u$ . Para este caso, en que la lagrangiana depende de dos funciones,  $u$  y  $u^*$  de  $z$  y  $t$  y la primera derivada respecto de  $z$  y la primera derivada respecto de  $t$ , la ecuación (2.14) adquiere la forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = 0 \quad (2.21)$$

sustituyendo aquí la lagrangiana de la ecuación (2.19), obtenemos:

$$iu_z^* - 2uu^*u^* - (-iu_z^*) - u_{tt}^* = 0 \quad (2.22)$$

y, al sumar los términos semejantes y tomar el complejo conjugado, se vuelve:

$$-2iu_z - 2\|u\|^2u - u_{tt} = 0 \quad (2.23)$$

esto, al ser multiplicado por  $-\frac{1}{2}$  queda:

$$iu_z + \frac{1}{2}u_{tt} + \|u\|^2u = 0 \quad (2.24)$$

que es la ecuación NLS. Al tomar la ecuación de Euler lagrange, pero ahora con la función  $u^*$ , se obtiene el mismo resultado.

Habiendo observado este resultado, podemos seguir nuestra exploración de las herramientas variacionales. En particular, exploraremos ahora el teorema de Noether.





---

Capítulo 3

# El teorema de Noether

---

En el siglo XIX, Amalie Noether presentó, en su artículo titulado “Problemas invariantes de variaciones” [4] un teorema fundamental en la física teórica. Dicho teorema puede enunciarse de la siguiente manera [2]:

**Teorema 3.** *A cada transformación continua de “coordenadas” que deja invariante la acción de un campo físico, le corresponde una ley de conservación.*

En este enunciado, el término “coordenadas” puede referirse tanto las variables independientes, por ejemplo  $z$  y  $t$ , como a las funciones dependientes que aparezcan en la lagrangiana.

Aunque el enunciado recién expuesto pareciera simple, representa por completo una revolución en la física teórica. Podemos decir, sin lugar a dudas que es en gran parte responsable de la importancia actual del concepto de simetría en la física.

Cuando se habla de simetrías en la física, se está haciendo referencia a una propiedad de los sistemas físicos que no cambian ante alguna transformación continua o discreta [32] (aquí podemos entender la relación del teorema con el concepto de simetría). En este sentido podemos, en el contexto del teorema de Noether, observar simetrías que implican la existencia de cantidades conservadas: La simetría ante traslaciones espaciales (o la homogeneidad del espacio) da lugar a la ley de conservación del momento, la simetría ante traslaciones temporales da lugar a la propiedad de conservación de la energía y la simetría ante rotaciones (o isotropía del espacio) lleva a la conservación del momento angular.

Aunque todas las leyes de conservación enunciadas pueden observarse en la mecánica clásica, otras tantas (u otras simetrías, si tomamos al inverso el teorema de Noether) han hecho que una parte fundamental de la física teórica sea la búsqueda (tanto en la teoría como en la práctica) de la existencia y no existencia de simetrías en las leyes de la naturaleza y de sendas cantidades conservadas. Los hallazgos en ambos sentidos han propiciado descubrimientos que marcaron hitos en el desarrollo de la física teórica. Así, al observar fenómenos cuánticos, la necesidad de la preservación del momento y la energía llevó a Wolfgang Pauli a postular la existencia de Neutrinos [5], interpretar las cantidades conservadas ante transformaciones de Lorentz llevó a Dirac a postular la existencia de antimateria [6]; y la búsqueda de la simetría ante reflexiones temporales, de carga y de “paridad” ha resultado en el desecho de teorías sobre la naturaleza del universo y en la formulación de, por ejemplo, el modelo estándar de la física de partículas [33].

En otros casos, en sistemas clásicos ya conocidos, puede usarse el teorema de Noether para profundizar el análisis a través de la predicción de cantidades conservadas. Por ejemplo, en sistemas predichos teóricamente, como algunos solitones que pueden describirse con lagrangianas que dependen de derivadas fraccionarias de algún tipo, su existencia podría descartarse si no se conserva la energía según alguna generalización del teorema de Noether.

Como hemos visto, el teorema de Noether y la formulación lagrangiana se alzan como un pilar de la física teórica moderna. Sobre el segundo tema hemos hecho ya un repaso, y para explorar un poco más el primero, en este capítulo se ofrece una introducción al teorema de Noether y se presenta la demostración de una versión simplificada.

Por la longitud de la demostración, ésta se ha separado en las siguientes partes:

1. El teorema de Noether (donde se presenta el enunciado)
2. Enunciado equivalente tras un cambio de coordenadas
3. Condición equivalente de invariancia
4. Prueba de la existencia de cantidades conservadas

### 3.1. El teorema de Noether

Aunque Noether no considera explícitamente entre sus hipótesis que el campo físico en cuestión cumple el principio de Hamilton (es decir, satisface un conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange), es una condición necesaria, como se verá en lo subsecuente.

Antes de enunciar el teorema que se probará, es necesario considerar un ingrediente fundamental que consideraremos a continuación:

**Definición 3.1.1.** Sean  $x := \{x_1, \dots, x_n\}$  variables independientes y

$$q := \{q_1(x), \dots, q_n(x)\}$$

funciones de ellas y sea un grupo de transformaciones que lleva  $x$  y  $q$  a las variables independientes  $y := \{y_1, \dots, y_n\}$  y a un conjunto de funciones de ellas  $q^* := \{q_1^*(y), \dots, q_n^*(y)\}$ .

Una función  $P$  es llamada invariante del grupo si existe una relación:

$$P\left(x, q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \dots\right) = P\left(y, q^*, \frac{\partial q^*}{\partial y}, \frac{\partial^2 q^*}{\partial y^2}, \dots\right) \quad (3.1)$$

En particular, la integral  $I$  es un invariante del grupo si, para un dominio arbitrario  $\Omega$ :

$$I = \int \dots \int_{\Omega} f\left(x, q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \dots\right) dx = \int \dots \int_{\Omega^*} f\left(y, q^*, \frac{\partial q^*}{\partial y}, \frac{\partial^2 q^*}{\partial y^2}, \dots\right) dy \quad (3.2)$$

siendo  $\Omega^*$  el dominio transformado.

Comencemos con enunciar una versión simplificada del teorema:

**Teorema 4.** Sean  $x_1$  y  $x_2$  variables independientes,  $q_1(x_1, x_2)$  y  $q_2(x_1, x_2)$  funciones de ellas y

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, q_{1,x_1}, q_{1,x_2}, q_{1,2x_2} \dots, q_{1,nx_2} \dots, q_{2,x_1}, q_{2,x_2}, q_{2,2x_2} \dots, q_{2,mx_2} \dots)$$

una densidad lagrangiana. donde  $q_{m,nx_i}$  es la notación para la  $n$ -derivada de  $q_m$  con respecto de  $x_i$ .

Si bajo las transformaciones

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1 + \epsilon \xi_1 \\ x_2^* &= x_2 + \epsilon \xi_2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$q_1^*(x_1^*, x_2^*) = q_1(x_1, x_2) + \epsilon \phi_1(q_1(x_1, x_2))$$

$$q_2^*(x_1^*, x_2^*) = q_2(x_1, x_2) + \epsilon \phi_2(q_2(x_1, x_2))$$

con  $1 > \epsilon > 0$  el parámetro de la transformación,  $\xi_1, \xi_2$  números reales y  $\phi_1(q_1)$  y  $\phi_2(q_2)$  funciones complejas, se cumple que:

$$\begin{aligned} S &= \int \int_{\Omega} \mathcal{L}(q_1, q_2, q_{1,x_1}, q_{1,x_2}, q_{1,2x_2} \dots, q_{1,nx_2} \dots, q_{2,x_1}, q_{2,x_2}, q_{2,2x_2} \dots, \\ &\qquad\qquad\qquad q_{2,mx_2} \dots) dx_1 dx_2 \\ &= \int \int_{\Omega^*} \mathcal{L}(q_1^*, q_2^*, q_{1,x_1}^*, q_{1,x_2}^*, q_{1,2x_2}^* \dots, q_{1,nx_2}^* \dots, q_{2,x_1}^*, q_{2,x_2}^*, q_{2,2x_2}^* \dots, \\ &\qquad\qquad\qquad q_{2,mx_2}^* \dots) dx_1^* dx_2^* \end{aligned} \tag{3.4}$$

entonces existe una ley de conservación de la forma:

$$div(Q) = \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = 0 \tag{3.5}$$

con  $Q$  función de  $q_1, q_2$  y sus derivadas.

Este teorema es más sencillo que el enunciado en un principio, pues al restringir la dependencia de las funciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$  y al considerar que  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son constantes, se están dejando fuera muchos grupos de transformaciones que sí eran permitidas en el enunciado original. Sin embargo, para los alcances de este trabajo, son suficientes aquellas que se han considerado. Busquemos ahora cómo reformular el enunciado del teorema 4 de forma que podamos probar su validez.

### 3.2. Enunciado equivalente tras un cambio de coordenadas

Al observar la ecuación (3.4) podemos ver que cada una de las integrales están en función de variables distintas. Observemos con detenimiento qué forma adquieren las funciones del lado derecho en términos de las variables del lado izquierdo: si observamos (3.3) podemos ver que:

$$\begin{aligned}
 q_{1,x_1}^*(x_1^*, x_2^*) &= \frac{\partial q_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) \frac{\partial x_1}{\partial x_1^*} + \epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} \frac{\partial q_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1(x_1, x_2)}{\partial x_1^*} \\
 &= \frac{\partial q_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \epsilon \frac{\partial \phi_1(q_1(x_1, x_2))}{\partial q_1} \frac{\partial q_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\
 q_{1,x_2}^*(x_1^*, x_2^*) &= \frac{\partial q_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \epsilon \frac{\partial \phi_1(q_1(x_1, x_2))}{\partial q_1} \frac{\partial q_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\
 q_{2,x_1}^*(x_1^*, x_2^*) &= \frac{\partial q_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \epsilon \frac{\partial \phi_2(q_2(x_1, x_2))}{\partial q_2} \frac{\partial q_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\
 q_{2,x_2}^*(x_1^*, x_2^*) &= \frac{\partial q_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \epsilon \frac{\partial \phi_2(q_2(x_1, x_2))}{\partial q_2} \frac{\partial q_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Aquí se tienen las expresiones para las funciones transformadas de las variables transformadas, en función de las funciones originales de las variables originales (las expresiones para las derivadas de orden mayor son similares y todas lineales en  $\epsilon$ )

Ahora observemos el lado derecho de la integral (3.4) y hagamos un cambio de coordenadas  $x_1^* \rightarrow x_1$   $x_2^* \rightarrow x_2$ . Para hacer esto, es necesario expresar las funciones en las nuevas coordenadas, cambiar el dominio y multiplicar el integrando por el jacobiano de la transformación. El dominio  $\Omega^*$  se transforma en  $\Omega$  pues las transformaciones (3.3) son invertibles, y el jacobiano es 1 pues:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial x_2} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2^*}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{3.7}$$

Por tanto, y considerando las transformaciones (3.3), tenemos que el lado derecho de la integral (3.4) se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 &\int \int_{\Omega^*} \mathcal{L}(q_1^*, q_2^*, q_{1,x_1}^*, q_{1,x_2}^*, q_{1,2x_2}^* \dots, q_{1,nx_2}^* \dots, q_{2,x_1}^*, q_{2,x_2}^*, q_{2,2x_2}^* \dots, q_{2,mx_2}^* \dots) dx_1^* dx_2^* \\
 &= \int \int_{\Omega} \mathcal{L}(q_1 + \epsilon \phi_1, q_{1,x_1} + \epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} q_{1,x_1}, q_{1,x_2} + \epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} q_{1,x_2}, \dots, \\
 &\quad q_2 + \epsilon \phi_2, q_{2,x_1} + \epsilon \frac{\partial \phi_2}{\partial q_2} q_{2,x_1}, q_{2,x_2} + \epsilon \frac{\partial \phi_2}{\partial q_2} q_{2,x_2}, \dots) dx_1 dx_2
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

con lo que hemos expresado la condición de invariancia (3.4) en una ecuación equivalente que tiene el mismo dominio y las mismas variables en ambos lados.

### 3.3. Condición equivalente de invariancia

Hasta el momento no se ha conseguido mucho, pues sólo se ha expresado la condición de invariancia requerida por el teorema en una forma ligeramente distinta, pero esto no nos aporta muchas ventajas operacionales. Procedamos ahora a observar la última expresión, y notemos que

$\mathcal{L}$  dentro de la integral está evaluada en los argumentos  $q_1, q_{1,x_1}, q_{2,x_1} \dots$  cada uno aumentado por un término muy pequeño (el parámetro de la transformación y el generador infinitesimal). Esto nos hace pensar en expresar la función como su expansión en serie de Taylor.

Por un procedimiento que consiste en tomar una expresión en serie de potencias de la lagrangiana modificada, tenemos que el miembro derecho de (3.8) se puede expresar como:

$$\int \int_{\Omega} \mathcal{L}(q_1, q_2, q_{1,x_1}, q_{1,x_2}, q_{2,x_1}, q_{2,x_2} \dots) dx_1 dx_2 + \int \int_{\Omega} \delta \mathcal{L} dx_1 dx_2 + \int \int_{\Omega} \mathcal{O}(\epsilon^2) dx_1 dx_2 \quad (3.9)$$

donde hemos definido la variación de la lagrangiana,  $\delta \mathcal{L}$ , como la parte lineal de la expansión de la función lagrangiana y el tercer término, que en lo siguiente no consideraremos, es de orden de magnitud  $\epsilon^2$ .

Considerando lo anterior, la condición de invariancia ahora luce de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} \mathcal{L}(q_1, q_2, q_{1,x_1}, q_{1,x_2}, q_{2,x_1}, q_{2,x_2} \dots) dx_1 dx_2 &= \int \int_{\Omega} \mathcal{L}(q_1, q_2, q_{1,x_1}, q_{1,x_2}, q_{2,x_1}, q_{2,x_2} \dots) \\ &\quad dx_1 dx_2 \\ &+ \int \int_{\Omega} \delta \mathcal{L} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Como el miembro de la izquierda es igual al primer miembro de la derecha, se sigue que la condición de invariancia es equivalente a:

$$\int \int_{\Omega} \delta \mathcal{L} dx_1 dx_2 = 0$$

Además, como por hipótesis el intervalo de integración es arbitrario, el integrando debe de ser idénticamente cero, esta condición se reduce a:

$$\delta \mathcal{L} = 0 \quad (3.10)$$

### 3.4. Prueba de la existencia de cantidades conservadas

En la última sección vimos que la condición de invariancia se reduce al pedir que la variación de la función lagrangiana sea idénticamente cero. Calculemos pues qué forma tiene dicha variación.

Recordando que  $\delta \mathcal{L}$  era la parte lineal de la expansión en serie de Taylor de la lagrangiana, podemos expresarla como tal:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \delta q_{1,x_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} \delta q_2 \dots = 0$$

Como la lagrangiana satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.14), podemos sustituir en la expresión anterior las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_1}} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_2}} + \dots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_1}} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_2}} + \dots\end{aligned}$$

con lo que obtenemos, después de considerar que  $\delta q_{1,nx_1} = \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \delta q_1$  y  $\delta q_{2,mx_1} = \frac{\partial^m}{\partial x_1^m} \delta q_2$ :

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \delta x_2 \\ &+ \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_1}} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_2}} + \dots \right] \delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \delta q_1 + \dots \\ &+ \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_1}} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_2}} + \dots \right] \delta q_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \delta q_2 + \dots\end{aligned}$$

Después de reagrupar algunos términos, esto se puede ver como:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \delta x_2 \\ &+ \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \delta q_1 \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} \delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_1 \right] \\ &+ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_2}} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \delta q_1 - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_2}} \delta q_1 \right] + \dots \\ &+ \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} \delta q_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \delta q_2 \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} \delta q_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_2 \right] \\ &+ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_2}} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \delta q_2 - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_2}} \delta q_2 \right] + \dots\end{aligned}$$

Si identificamos los términos entre corchetes con derivadas de productos, entonces podemos escribir esta ecuación como:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \delta x_2 \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \delta q_1 \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} \delta q_1 \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_2}} \delta q_1 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_1 \right] + \dots \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} \delta q_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} \delta q_2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_2}} \delta q_2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_2 \right] + \dots\end{aligned}$$

Hagamos un nuevo reacomodo de términos, usando esta vez el criterio de agrupar las derivadas respecto a cada variable independiente:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} \delta q_2 \right] \\ &+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} \delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} \delta q_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_2}} \delta q_1 \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_2}} \delta q_2 \right) \right. \\ &\left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_2 \dots \right]\end{aligned}$$

Como paso final recordemos, de la forma original de nuestras transformaciones (3.3) que  $\delta x_1 = \epsilon \xi_1$  y  $\delta x_2 = \epsilon \xi_2$ , por lo que la condición de invariancia finalmente implica que:

$$\begin{aligned} & \epsilon \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \xi_1 \mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} \delta q_2 \right] + \\ & \epsilon \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \xi_2 \mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} \delta q_1 - \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} \right) \delta q_1 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_1 - \dots + \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} \delta q_2 - \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} \right) \delta q_2 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_2 \dots \right] = 0 \end{aligned}$$

Si ahora definimos:

$$Q_1 := \epsilon \left[ \xi_1 \mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} \delta q_2 \right] \quad (3.11)$$

y

$$\begin{aligned} Q_2 := & \epsilon \left[ \xi_2 \mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} \delta q_1 - \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} \right) \delta q_1 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_1 - \dots + \right. \\ & \left. \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} \delta q_2 - \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} \right) \delta q_2 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_2 \dots \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

la condición  $\delta \mathcal{L} = 0$  toma la forma:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = 0$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Podemos observar que si integramos la última expresión en  $x_1$  obtenemos:

$$Q_1 \Big|_{x_1^1}^{x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{x_1^1}^{x_1^2} Q_2 dx_1 = 0$$

por lo que si  $Q_1(x_1^2, x_2) = Q_1(x_1^1, x_2) = 0$ , la integral no depende de  $x_2$ , es decir, se conserva en todo el intervalo.

Finalmente, se ha logrado hallar una herramienta poderosísima que exhibe las ventajas de la formulación lagrangiana en la física, y además lo hace de una forma sumamente elegante. Nuestro objetivo, en adelante, será extender estas herramientas a sistemas descritos por lagrangianas que dependen de un nuevo tipo de derivadas: las derivadas fraccionarias.





# Derivadas fraccionarias

---

Como parte central de este trabajo nos propusimos extender los resultados presentados en los capítulos anteriores, considerando sistemas descritos por lagrangianas que dependan de funciones con varias variables independientes y sus derivadas de orden entero y fraccionario. Es menester, pues, presentar el concepto de derivadas fraccionarias, justificar su estudio y observar algunas propiedades que nos ayuden a lograr nuestro cometido. Este capítulo se dedicará a dicha tarea, que será presentada con el siguiente orden:

- Presentación de la idea y breve exploración histórica
- Definición y algunas propiedades de las derivadas fraccionarias de Grünwald-Letnikov

Esta estructura se considera útil pues no existe una definición única para el operador de derivada de orden arbitrario, por lo que es importante, después de mencionar la variedad de definiciones, enfocarse en un solo tipo de derivadas antes de presentar las derivadas fraccionarias centradas de Duarte-Ortigueira.

## 4.1. Presentación de la idea y breve exploración histórica

Tradicionalmente y desde los orígenes del cálculo diferencial, existe la noción de derivación de ordenes mayores que uno. Esta noción corresponde a aplicar el operador derivada varias veces a una misma función, es decir: si  $D$  es el operador derivada, entonces  $D^n = D(D(D(\dots(D))))$  es el resultado de operar  $n$  veces y, si  $f$  es una función a la que se pueda aplicar dicho operador, entonces  $D^n(f)$  es la derivada de orden  $n$  de la función  $f$ .

La idea de tener una derivada de orden arbitrario (a lo que por razones históricas se le ha llamado derivada fraccionaria), consiste entonces en permitir al índice  $n$  tomar cualquier valor de la recta real (conjunto al que nos limitaremos en esta tesis) o cualquier elemento del conjunto de los complejos. Esta idea surgió desde los albores del cálculo, pues hay evidencia de que Leibniz en sus intercambios con L'Hopital, Euler, Riemman o Liouville trataron el tema desde el siglo XVII [8, 10]. Diferentes enfoques han llevado a numerosas definiciones de lo que puede llamarse una derivada fraccionaria, y en la tabla 4.1, tomada de [15] se muestran algunas de ellas.

Las primeras 4 definiciones hacen uso de una integral de orden arbitrario  $n$  (definiciones de este operador se hallan en la bibliografía atribuidos a Cauchy [8, 15]) y de la interpretación de la integración como un procedimiento inverso a la derivación. Informalmente pueden entenderse las definiciones de Riemann-Liouville como una aplicación sucesiva de una integral fraccionaria y una derivada de orden entero, así, si se deseara calcular la derivada de orden 1.5, se podría aplicar una integral de orden 1/2 seguida de una derivada de orden 2.

Derivada	Definición
Riemann-Liouville izquierda	$D^\alpha \phi(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b \phi(\tau)(t-\tau)^{\alpha-n-1} d\tau$
Riemann-Liouville derecha	$D^\alpha \phi(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \phi(\tau)(t-\tau)^{\alpha-n-1} d\tau$
Caputo izquierda	$D^\alpha \phi(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \left[ \int_0^t \phi^{(n)}(\tau)(t-\tau)^\alpha - 1 d\tau \right], \tau > 0$
Caputo derecha	$D_-^\alpha \phi(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \left[ \int_t^\infty \phi^{(n)}(\tau)(t-\tau)^\alpha - 1 d\tau \right], \tau > 0$
Grünwald-Letnikov izquierda	$D_+^\alpha \phi(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \binom{\alpha}{k} \phi(t-kh)}{h^\alpha}$
Grünwald-Letnikov derecha	$D^\alpha \phi(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \binom{\alpha}{k} \phi(t+kh)}{h^\alpha}$

**Tabla 4.1:** Lista de algunos tipos de derivadas fraccionarias, donde  $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq -1}$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

La definición de Caputo emplea la misma idea pero intercambia el orden de las operaciones, aplicando el operador de derivación antes de la integración.

Por otro lado las definiciones de Grünwald-Letnikov generalizan las expresiones de la derivada de orden entero como un límite de diferencias finitas hacia atrás y hacia adelante. Este método tiene como ventajas las facilidades para el cómputo y una construcción matemáticamente más sencilla.

Como puede verse, estas expresiones no son necesariamente equivalentes y su uso dependerá de las ventajas de cada una en cada caso particular.

#### 4.1.1. Ecuaciones diferenciales fraccionarias en la física

Una parte fundamental de este trabajo es ver de qué manera se pueden utilizar las ecuaciones diferenciales fraccionarias (o ecuaciones diferenciales en donde aparecen derivadas de orden entero y fraccionario). Sobre este asunto vale la pena recordar que las leyes fundamentales de la física se suelen presentar en términos de ecuaciones diferenciales con derivadas de orden entero, y por lo tanto cualquier problema físico que quiera describirse a partir de primeros principios tendrá forzosamente sólo derivadas de orden entero.

Existen, sin embargo, problemas en la física que no pueden resolverse analíticamente a partir de primeros principios, por ejemplo, problemas donde hay una gran número de cuerpos con interacciones entre dos o más de ellos que no permiten, al menos en la práctica, un tratamiento analítico. Este tipo de problemas podemos encontrarlos, en el área de biofísica, en la ciencia de polímeros, en la termodinámica [10], la física estadística de fenómenos no markovianos (fenómenos que tienen “memoria”) y en otras áreas donde se presentan fenómenos altamente no lineales donde la descripción es muy difícil o tiene que pasar por la consideración de fuerzas disipativas que implican la no reversibilidad de algunos procesos [34].

En estas áreas suele hallarse la necesidad de buscar funciones que al modificar las ecuaciones obtenidas de primeros principios ajusten los resultados numéricos o analíticos a los resultados experimentales. En esta búsqueda, han demostrado ser útiles las derivadas fraccionarias. Incluso en algunos casos, han emergido naturalmente antes de que se notara la relación con el concepto de derivada fraccionaria (tal es el caso de la aparición de las derivadas fraccionarias de Riemann-

Liouville en el caso de la ciencia de los polímeros, como se puede observar en el capítulo 6 del libro editado por Hilfer [10]).

En el caso de la óptica no lineal, se han podido hallar interesantes aplicaciones pues se han hallado ecuaciones diferenciales fraccionarias que dan lugar a solitones ópticos, como los hallados por Fujioka [19] usando las derivadas de Grünwald-Letnikov o por Velasco [20] usando las derivadas de Duarte-Ortigueira.

En ambos trabajos se busca observar la existencia teórica de solitones ópticos en ecuaciones que resultan de generalizar la ecuación no lineal de Schrödinger agregando derivadas fraccionarias. En otras generalizaciones de dicha ecuación pero conteniendo sólo derivadas de orden entero, ya se había encontrado dicho fenómeno [35]. [20]

En el presente trabajo se busca extender la utilidad de estas derivadas ampliando el alcance de lo obtenido para las derivadas fraccionarias de Duarte-Ortigueira (la definición de dichas derivadas fraccionarias no figura en la tabla anterior y se presentará más adelante) al extender algunas herramientas como el teorema de Noether y las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Resultados similares a los que se buscan en este trabajo se han hallado usando las definiciones de Riemann-Liouville [12, 13, 34, 36], Grünwald-Letnikov [37] y de Caputo [11] pero no usando las derivadas definidas por Duarte-Ortigueira.

Siguiendo a Duarte-Ortigueira [15], examinaremos las derivadas fraccionarias de Grünwald-Letnikov pues para una gran cantidad de funciones resultan equivalentes a las de Riemann-Liouville, Caputo o Marchaud [9], además de que la construcción de las derivadas de Grünwald-Letnikov es cercana a las derivadas fraccionarias de Duarte-Ortigueira, lo que facilitará el trabajo futuro.

## 4.2. Definición y algunas propiedades de las derivadas fraccionarias de Grünwald-Letnikov

La derivada fraccionaria izquierda de Grünwald-Letnikov de orden  $\alpha$  de la función  $f$  en el punto  $x$ ,  $D_i^{(\alpha)} f(x)$  se define como sigue:

**Definición 4.2.1.**

$${}_x D_i^{(\alpha)} f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh)}{h^\alpha} \quad (4.1)$$

y la derivada fraccionaria derecha de Grünwald-Letnikov de orden  $\alpha$  de la función  $f$  en el punto  $(x)$ ,  $D_d^{(\alpha)} f(x)$  como:

$${}_x D_d^{(\alpha)} f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x + kh)}{h^\alpha} \quad (4.2)$$

donde  $\alpha \geq 0$ , el subíndice  $_x$  a la izquierda indica que la derivación es en esa variable, y se ha definido  $\binom{\alpha}{k}$  de la siguiente forma:

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)}$$

La razón de la forma de estas definiciones es entendible si observamos la definición de

derivada de primer orden:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Este límite es equivalente a:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y podemos observar que la primera sólo toma valores a la izquierda del punto  $x$  y la segunda a la derecha. La aplicación reiterativa de dichas definiciones se puede expresar como [38]:

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x+kh)}{h^n}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) := (-1)^n \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh)}{h^n}$$

respectivamente, con  $\binom{n}{k}$  el coeficiente binomial típico, de forma que las definiciones 4.1 y 4.2 se entienden como generalizaciones naturales considerando que la función gamma, evaluada en  $n \in \mathbb{N}$  cumple  $\Gamma(n+1) = n!$

Mención especial merece el cambio en los límites de la suma. En el caso de que  $\alpha$  sea un número natural, la serie es finita pues todos los términos después de  $\binom{\alpha}{\alpha}$  son cero, recuperando la definición de la derivada de orden entero. Se sabe, además, que para  $\alpha \geq 0$  la serie siempre converge si la función  $f$  tiende a cero cuando  $x \rightarrow \infty$  y  $x \rightarrow -\infty$  [39]

### 4.2.1. Propiedades

En los textos de Samko et. al [39] y Duarte [15] se puede hallar la prueba de las siguientes propiedades de las derivadas fraccionarias de Grünwald-Letnikov:

$$\begin{aligned} D_d^{(\alpha)}[f(x) + g(x)] &= D_d^{(\alpha)}f(x) + D_d^{(\alpha)}g(x) \\ D_d^{(\alpha)}g(ax) &= a^\alpha D_d^{(\alpha)}g(\tau)|_{\tau=ax} \\ D_d^{(\alpha)}g(-x) &= (-1)^\alpha D_d^{(\alpha)}g(\tau)|_{\tau=-x} \\ D_d^{(\alpha)}[\phi(x)\psi(x)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \phi^{(n)}\psi^{(\alpha-n)}(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)D_d^{(\alpha)}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)D_i^{(\alpha)}g(x) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Las propiedades mostradas y la facilidad de cómputo de la definición dotan de utilidad a la derivada de Grünwald-Letnikov en diversas áreas tales como el análisis de sistemas lineales [15, 40], pero hay algunas situaciones físicas en que el hecho de que cada derivada sólo tome valores a un lado del punto de evaluación, parece no ser ideal. En el siguiente capítulo, presentaremos un nuevo tipo de derivadas necesarias para seguir la exploración del tema, pero antes sigamos explorando el ejemplo de la ecuación NLS.

Para continuar con el ejemplo del capítulo 2, exploremos un poco más sobre la ecuación NLS y los solitones ópticos, y observemos algunas versiones diferentes de la ecuación NLS:

### 4.3. Sistemas no lineales de Schrödinger generalizados y fraccionarios

La ecuación NLS (2.19) es útil para describir pulsos de picosegundos, en la escala temporal y de amplitudes “pequeñas”. Si se quiere describir sistemas en menores escalas temporales y de más altas potencias, es natural que aparezcan más términos dispersivos (i.e. derivadas de mayor orden en la variable “transversal”) o términos no lineales de más alto orden [26]. Se ha hallado que este tipo de ecuaciones también tienen como solución solitones ópticos [18], a continuación se muestra un ejemplo mencionado en [19]:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \epsilon(\alpha) {}_t D^\alpha u + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \|u\|^2 u - \|u\|^4 = 0 \quad (4.4)$$

Esta ecuación, donde  ${}_t D^\alpha u$  es la derivada de orden fraccionario  $\alpha$  con respecto a  $t$  y  $\epsilon$  es una función real, tiene solitones como soluciones cuando  $\alpha = 2$  y  $\alpha = 3$ . Este hecho sugiere, para Fujioka, que puede existir una ecuación fraccionaria donde la derivada esté entre el orden 2 y 3, que presente soluciones con forma de solitón. En el mismo artículo [19], podemos hallar que la ecuación:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \epsilon(\alpha) D^\alpha u + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \|u\|^2 u \pm \sin(\alpha\pi) \|u\|^{2(\alpha-1)} u - \|u\|^4 = 0 \quad (4.5)$$

con  $\alpha$  entre 2 y 3,  $\epsilon$  una función compleja y

$$D^\alpha u(z, t) := \frac{1}{2} [{}_t D_i^\alpha u(z, t) + (-1)^\alpha {}_t D_d^\alpha u(z, t)]$$

definida en términos de las derivadas izquierda y derecha de Grünwald-Letnikov, tiene soluciones estables tipo “solitón”

Observando este ejemplo podemos ir imaginando una aplicación para las derivadas fraccionarias centradas, pero hemos de avanzar un par de capítulos más para concretarlo. Acercémonos al objetivo presentando las derivadas fraccionarias centradas.



# Derivadas fraccionarias centradas

---

En este capítulo presentaremos una clase de derivadas fraccionarias que tienen relativamente poco tiempo de existencia, y que es esencial para el entendimiento de los siguientes capítulos de este trabajo.

Exhibiremos los puntos que se consideran más importantes para el desarrollo de los siguientes capítulos con la estructura que se muestra a continuación.

- Motivación y definición de las derivadas fraccionarias centradas de Duarte-Ortigueira
- Propiedades de las derivadas fraccionarias centradas
- Ejemplo de aplicación (En donde se usan los puntos anteriores para mostrar una ecuación diferencial fraccionaria y su solución)

## 5.1. Motivación y definición de las derivadas fraccionarias centradas de Duarte-Ortigueira

Las derivadas fraccionarias centradas extienden la idea de definir una derivada de orden fraccionario al generalizar la definición de la derivada como el límite de un cociente de diferencias finitas. Hemos de recordar que en el capítulo anterior, se generalizó la aplicación sucesiva de los siguientes límites:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - h)}{h}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

dando lugar a las definiciones de las derivadas fraccionarias de Grünwald-Letnikov y se hizo notar que una de las dos definiciones toma valores “a la derecha” del punto de evaluación y la otra de ellas a la izquierda. Esto implica una dependencia de la derivada fraccionaria en una de las dos direcciones a partir del punto, no ambas. Lo anterior puede ser beneficioso para describir procesos que dependen de momentos anteriores (si la variable independiente corresponde al tiempo y la derivada tomada es la izquierda) o que dependen de sus alrededores en una dirección específica. Sin embargo, existen procesos que espacialmente no dependen de una dirección específica, sino de todos sus alrededores [15]. Entre este tipo de fenómenos están los de difusión, pues se halla en la bibliografía que procesos super o subdifusivos se han descrito



apropiadamente con ecuaciones diferenciales fraccionarias [41]. Estas consideraciones sugieren voltear a ver el siguiente límite:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h/2) - f(x - h/2)}{h}$$

que es igualmente equivalente para las funciones diferenciables pero tiene la característica de tomar valores a la izquierda y a la derecha del punto de evaluación.

La aplicación repetida  $N$  veces de la diferencia anterior se puede expresar como [14]:

$$\frac{d^N}{dx^N}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^N} (-1)^{N/2} \sum_{k=-N/2}^{N/2} \frac{(-1)^k \Gamma(N+1) f(x - kh)}{\Gamma(N/2 + k + 1) \Gamma(N/2 - k + 1)} \quad (5.1)$$

si  $N$  es un entero par positivo y:

$$\frac{d^N}{dx^N}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^N} (-1)^{\frac{N+1}{2}} \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N+1)/2} \frac{(-1)^k \Gamma(N+1) f(x - kh + h/2)}{\Gamma((N+1)/2 - k + 1) \Gamma((N-1)/2 + k + 1)} \quad (5.2)$$

si  $N$  es un entero impar positivo.

Por lo tanto, cambiando  $N$  por  $\alpha$ , donde  $\alpha > -1$ , se pueden dar las siguientes definiciones:

**Definición 5.1.1.**

$${}_x D_p^\alpha f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} (-1)^{\alpha/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1) f(x - kh)}{\Gamma(\alpha/2 + k + 1) \Gamma(\alpha/2 - k + 1)} \quad (5.3)$$

**Definición 5.1.2.**

$${}_x D_i^\alpha f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1) f(x - kh + h/2)}{\Gamma((\alpha+1)/2 - k + 1) \Gamma((\alpha-1)/2 + k + 1)} \quad (5.4)$$

Y llamamos a  ${}_x D_p^\alpha f(x)$  la “derivada par” de  $f$  con respecto de  $x$  y a  ${}_x D_i^\alpha f(x)$  la “derivada impar” centrada de orden fraccionario. Duarte Ortigueira no considera los factores  $(-1)^{\alpha/2}$  y  $(-1)^{(\alpha-1)/2}$ , pero estos factores constantes no afectan las propiedades que se enunciarán más adelante. Las definiciones correspondientes sin dichos factores, son llamadas derivada de tipo uno y derivada de tipo dos, respectivamente. En este trabajo se han conservado dichos factores siguiendo a [20] con el fin de recuperar las definiciones de las derivadas enteras en los casos en que  $\alpha$  tome esos valores.

Por su construcción, se esperaría que la derivada par tuviera mayor relevancia física cuando el entero más cercano a  $\alpha$  sea par, mientras que la derivada impar debería ser más relevante cuando el entero más cercano a  $\alpha$  fuera un número impar.

Por otro lado, definiciones anteriores permiten probar las siguientes propiedades:

## 5.2. Propiedades de las derivadas fraccionarias centradas

Entre las propiedades más importantes de las derivadas fraccionarias centradas podemos hallar las siguientes:

$$\begin{aligned}
 D_p^\alpha[f(x) + g(x)] &= D_p^\alpha f(x) + D_p^\alpha g(x) \\
 D_i^\alpha[f(x) + g(x)] &= D_i^\alpha f(x) + D_i^\alpha g(x) \\
 D_i^\beta\{D_i^\alpha f(x)\} &= -D_p^{\alpha+\beta} f(x) \\
 D_p^\beta\{D_p^\alpha f(x)\} &= D_p^{\alpha+\beta} f(x) \\
 D_i^\beta\{D_p^\alpha f(x)\} &= D_i^{\alpha+\beta} f(x)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Además, se puede mostrar [15] que la transformada de Fourier usual cumple que:

$$\begin{aligned}
 F[D_p^\alpha f(x)] &= (-1)^{\alpha/2} |\xi|^\alpha F(\xi) \\
 F[D_i^\alpha f(x)] &= -(-1)^{(\alpha-1)/2} i |\xi|^\alpha \operatorname{sgn}(\xi) F(\xi)
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde  $F(\xi)$  es la transformada de Fourier de la función  $f(x)$ ,  $i$  es la unidad imaginaria y  $\operatorname{sgn}(\xi)$  es la función signo evaluada en  $\xi$ .

Mostremos ahora un par de relaciones que se cumplen para los dos tipos de derivadas presentadas. Estas relaciones se usarán en la siguiente sección. La primera de ellas es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f D_p^\alpha g dt = \int_{-\infty}^{\infty} g D_p^\alpha f dt \tag{5.7}$$

Para demostrar esta relación hemos de suponer de entrada que las integrales convergen en el intervalo  $(-\infty, \infty)$  y, siguiendo a Velasco [20] definiremos:

$$W_{pk} := (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha/2 + k + 1)\Gamma(\alpha/2 - k + 1)}$$

por lo que al sustituir la definición se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f D_p^\alpha g dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t) \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{pk}(\alpha) g(z, t - kh) dt$$

y al intercambiar la suma y la integral, cambiar  $k$  por  $-k$  (lo que está permitido pues la suma es sobre todos los valores de  $k$ ) y hacer el cambio de variable  $t_1 = t + kh$ , lo que deja sin

modificación las diferenciales, se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f D_p^\alpha g dt = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t_1 - kh) W_{p-k}(\alpha) g(z, t_1) dt_1$$

y volviendo a intercambiar la suma y la integral, además de notar que el coeficiente  $W_{p_k}$  es simétrico ante cambios de signo del índice  $k$ , tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f D_p^\alpha g dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(z, t) W_{p_k}(\alpha) f(z, t - kh) dt$$

que es justamente la expresión de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g D_p^\alpha f dt$$

Por lo que la propiedad queda demostrada.

La penúltima propiedad a mostrar es la equivalente para la derivada impar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f D_i^\alpha g dt = - \int_{-\infty}^{\infty} g D_i^\alpha f dt \quad (5.8)$$

La demostración de esta propiedad es análoga, definiendo

$$W_{i_k} := (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma((\alpha + 1)/2 - k + 1) \Gamma((\alpha - 1)/2 + k + 1)}$$

con la particularidad de que el coeficiente  $W_{i_k}$  es antisimétrico ante cambios de signo del índice  $k$ , lo que da lugar al signo negativo en la ecuación (5.8).

### 5.2.0.1. Condiciones para la satisfacción de las igualdades recién probadas

Aunque podría hacerse un análisis mucho más intensivo de las condiciones que deben cumplir las funciones  $f$  y  $g$  recién utilizadas en la prueba de las relaciones (5.7) y (5.8), podemos vislumbrar algunos requisitos para su cumplimiento.

Al hacer la demostración, es muy importante notar que tanto en la suma como en la integral, los límites son  $-\infty$  e  $\infty$ , por lo que implícitamente estamos asumiendo que la suma converge para las dos funciones ( $g$  y  $f$ ), lo que de hecho es un requisito natural para poder decir que la derivada fraccionaria centrada existe. Adicionalmente se debe notar que es un requisito que las integrales sean finitas cuando el intervalo de integración se hace infinito. Con estas consideraciones, es posible descartar funciones que hacen que la integral crezca indefinidamente, por ejemplo.

### 5.3. Ejemplo de aplicación

Con el objeto de mostrar un ejemplo de ecuación diferencial fraccionaria (también llamada FDE o EDF) en donde la derivada fraccionaria usada sea una de las derivadas centradas de Duarte-Ortigueira, se resolverá a continuación la ecuación de difusión sustituyendo la segunda derivada espacial por una derivada fraccionaria y se observará el efecto que esto tiene en la solución cuando se usan diferentes órdenes de derivación cercanos a dos.

La ecuación de difusión en 1D con coeficiente de difusión constante es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, t)$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión y  $\Phi(x, t)$  puede representar, por ejemplo, una densidad en el punto  $x$  al tiempo  $t$ .

Manuel Duarte utiliza lo que él llama “derivada centrada de tipo 1”,  ${}_x D_{c1}^\alpha$  que se relaciona con la derivada centrada par de la siguiente forma:  $(-1)^{\frac{\alpha}{2}} {}_x D_{c1}^\alpha = {}_x D_p^\alpha$ . Como se puede ver de dicha relación y de (5.6), la transformada de Fourier de la derivada de clase 1, sería:

$$F [{}_x D_{c1}^\alpha f(x)] = |\xi|^\alpha F(\xi) \quad (5.9)$$

Y podemos notar que, cuando  $\alpha = 2$ ,  ${}_x D_{c1}^\alpha f(x) = -\frac{d^2}{dx^2} f(x)$ , de esta forma, podemos proponer una ecuación de difusión modificada.

Si sustituimos la segunda derivada espacial por una derivada de clase 1 de Duarte-Ortigueira y un factor -1, la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) = -D {}_x D_{c1}^\alpha \Phi(x, t) \quad (5.10)$$

Si aplicamos la transformada de Fourier de toda la expresión en la variable  $x$ , tenemos que la expresión anterior implica:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\Phi}(\xi, t) = -D |\xi|^\alpha \hat{\Phi}(\xi, t) \quad (5.11)$$

donde  $\hat{\Phi}(\xi, t)$  es la transformada de Fourier (respecto a  $x$ ) de la función  $\Phi(x, t)$

Esta expresión es una ecuación diferencial para la transformada  $\hat{\Phi}(\xi, t)$  que tiene como solución:

$$\hat{\Phi}(\xi, t) = A(\xi) \exp(-|\xi|^\alpha Dt) \quad (5.12)$$

Si en  $t = 0$  la función original tiene la forma:

$$\Phi(x, 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{x_0}\right)$$

entonces, por ser la función anterior una gaussiana, la transformada (que también es una gaussiana), al tiempo cero tiene la forma:

$$\hat{\Phi}(\xi, 0) = \sqrt{\frac{2}{x_0}} \exp(-\xi^2 x_0/2)$$

Por lo tanto, tras evaluar (5.12) en  $t = 0$ , se deduce que  $A(\xi) = \sqrt{\frac{2}{x_0}} \exp(-\xi^2 x_0/2)$ , lo que implica que:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(\xi, t) &= \sqrt{\frac{2}{x_0}} \exp(-\xi^2 x_0/2) \exp[-|\xi|^\alpha Dt] \\ &= \sqrt{\frac{2}{x_0}} \exp[-\xi^2 x_0/2 - |\xi|^\alpha Dt]\end{aligned}\quad (5.13)$$

Como siguiente paso en la solución de la ecuación diferencial original, hemos de aplicar la transformada inversa de Fourier de toda la expresión anterior. Esto tiene la forma:

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{x_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi x) \exp[-\xi^2 x_0/2 - |\xi|^\alpha Dt] d\xi \quad (5.14)$$

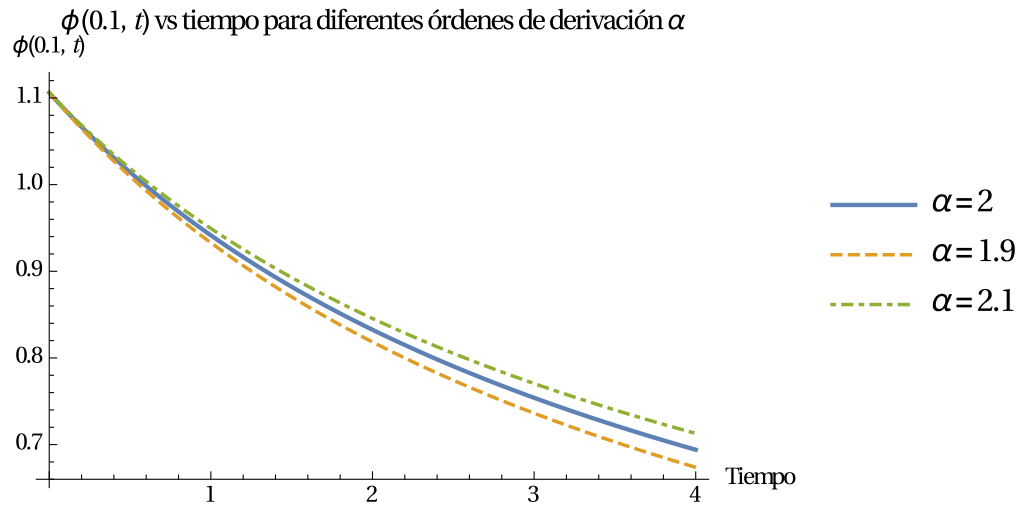
por lo que:

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{x_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2 x_0/2 - |\xi|^\alpha (Dt)) \exp(i\xi x) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{x_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2 x_0/2 - |\xi|^\alpha (Dt)) (\cos(\xi x) + i \operatorname{sen}(\xi x)) d\xi\end{aligned}\quad (5.15)$$

Si tomamos la parte real de esta expresión, y dividimos en dos la integral para hacer explícito el valor de  $|\xi|$ , la solución de la ecuación (5.10) es:

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{x_0}} \left[ \int_{-\infty}^0 \exp(-\xi^2 x_0/2 + \xi^\alpha (Dt)) \cos(\xi x) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \exp(-\xi^2 x_0/2 - \xi^\alpha (Dt)) \cos(\xi x) d\xi \right]\end{aligned}\quad (5.16)$$

Al resolver numéricamente esta integral usando el software Wolfram Mathematica para los valores  $\alpha = 1.9$ ,  $\alpha = 2$  y  $\alpha = 1.1$ , se obtienen las tres  $\Phi(x, t)$  que se muestran en la figura 5.1:

**Figura 5.1:** Solución de la ecuación diferencial fraccionaria para diferentes valores de  $\alpha$ 

Como se puede observar, la variación en el orden de derivación da lugar a procesos difusivos, con la tasa de variación de la concentración, diferente para cada orden de derivación, haciendo de las derivadas fraccionarias centradas una herramienta con potencial aplicación en el área mencionada por Chen [41]. Para buscar otro tipo de aplicaciones, en los siguientes capítulos se tratará de generalizar herramientas variacionales usando derivadas fraccionarias centradas.



# Ecuaciones de Euler - Lagrange para derivadas fraccionarias centradas

En el capítulo anterior se presentaron las derivadas fraccionarias centradas de Duarte-Ortigueira. Con el objetivo de seguir en la exploración de su utilidad, ahora se obtendrá un conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange para lagrangianas que dependen de funciones de una variable independiente y sus derivadas enteras y fraccionarias de tipo par e impar. La estructura del capítulo es la siguiente:

- Ecuaciones de Euler-Lagrange para lagrangianas que dependen de funciones de una variable independiente y sus derivadas enteras y fraccionarias
- Aplicación para una ecuación tipo NLS

## 6.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange para lagrangianas que dependen de una función de dos variables independientes y sus derivadas enteras y fraccionarias

En esta sección abandonaremos la notación que usamos en el Capítulo 2 y usaremos una que corresponda al caso de la propagación de luz en una fibra óptica, de forma que podamos seguir trabajando con el ejemplo de las ecuaciones tipo NLS generalizadas. En la descripción de una fibra óptica, las variables independientes son  $z$ , la longitud recorrida en una fibra óptica y  $t$ , el tiempo. La variable  $z$  la trataremos como semi-infinita y la variable  $t$  se considera infinita, pues en los problemas en los que se describe la propagación de pulsos luminosos en fibras ópticas se considera frecuentemente que la condición inicial es conocer la intensidad de la luz en  $z = 0$  y para todo tiempo (i.e. para  $-\infty < t < \infty$ ). Con estas consideraciones tenemos que la lagrangiana es de la forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_z, u_t, \dots, {}_t D_p^\alpha(u), {}_t D_i^\alpha(u)) \quad (6.1)$$

Con esta lagrangiana, y usando razonamientos parecidos a los usados en el Capítulo 2, la condición de extremalidad  $\delta \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \mathcal{L} dz dt = 0$  implica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \delta u_z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \delta u_t + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(u)} \delta D_p^\alpha(u) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(u)} \delta D_i^\alpha(u) \right] dz dt = 0 \quad (6.2)$$



Ahora, de nueva cuenta hemos de acudir a la linealidad de la derivada, lo que nos permite utilizar que:  $\delta u_t = \frac{\partial}{\partial t} \delta u$ ,  $\delta u_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta u$ , y relaciones similares para derivadas enteras de orden mayor y orden fraccionario.

Recordando el resultado del Capítulo 2, podemos separar la última integral en dos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} + \sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial z^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{iz}} + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{jt}} \right] \delta u dz dt + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(u)} D_p^\alpha(\delta u) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(u)} D_i^\alpha(\delta u) \right] dz dt = 0 \quad (6.3)$$

Observemos el segundo término, intercambiando los límites de integración (pues son  $z$  y  $t$  variables independientes) y consideremos, según lo mostrado en el capítulo anterior, que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) D_p^\alpha g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) D_p^\alpha f(t) dt$  y  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) D_i^\alpha g(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} g(t) D_i^\alpha f(t) dt$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(u)} D_p^\alpha(\delta u) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(u)} D_i^\alpha(\delta u) \right] dz dt = \\ & \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(u)} D_p^\alpha(\delta u) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(u)} D_i^\alpha(\delta u) \right] dt dz = \\ & \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \delta u D_p^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(u)} + \delta u D_i^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(u)} \right] dt dz = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \delta u D_p^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(u)} - \delta u D_i^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(u)} \right] dz dt \end{aligned} \quad (6.4)$$

Por lo que, finalmente, la condición de extremalidad (6.2) se puede escribir como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} + \sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial z^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{iz}} + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{jt}} \right] \delta u + \left[ \delta u D_p^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(u)} - \delta u D_i^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(u)} \right] dz dt = 0 \quad (6.5)$$

Como todos los términos del integrando tienen como factor común a  $\delta u$  y no hay condiciones especiales sobre ella, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} + \sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial z^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{iz}} + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{jt}} + \\ & D_p^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(u)} - D_i^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(u)} = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Éstas son las ecuaciones de Euler-Lagrange para lagrangianas que dependen de una función de dos variables independientes y sus derivadas enteras y fraccionarias.

## 6.2. Aplicación para una ecuación tipo NLS

Continuando con el ejemplo explorado en los Capítulos 2 y 4, ahora mostraremos una aplicación interesante de las derivadas fraccionarias centradas. Mostraremos cómo, siguiendo la idea propuesta por Fujioka en [19], se ha podido hallar que una ecuación NLS extendida fraccionaria, puede dar lugar a solitones ópticos.

### 6.2.1. Sistema NLS fraccionario

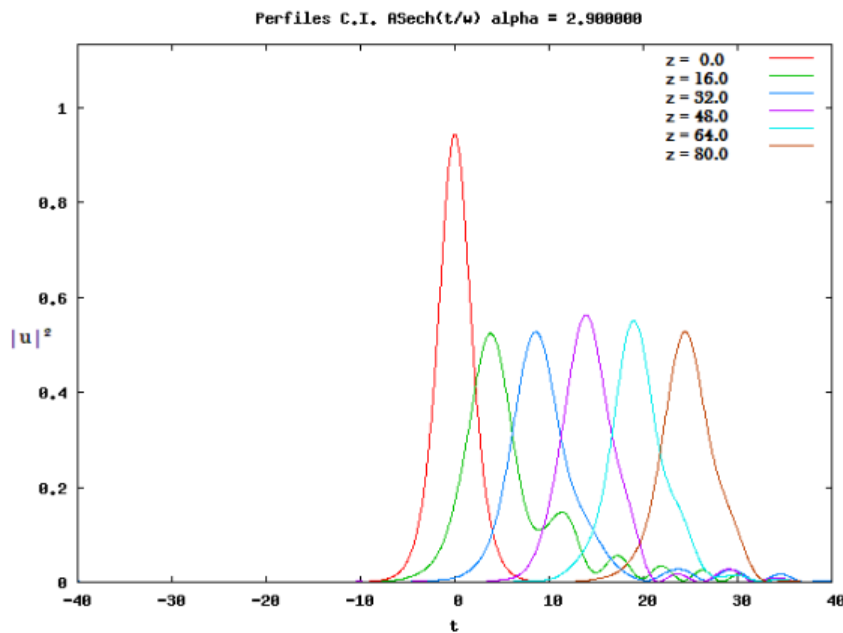
En la tesis “El comportamiento de los solitones ópticos a partir de derivadas fraccionaria centradas” [20], Manuel Velasco presenta una ecuación similar a la ecuación NLS generalizada presentada anteriormente (4.5), con la particularidad de que incluía términos con derivadas fraccionarias. Dicha ecuación resultó de interés teórico pues su solución numérica permitía la propagación de solitones. La mencionada ecuación se presenta a continuación:

$$iu_z + i\epsilon_2 d(\alpha) D_i^\alpha(u) - \epsilon_1 c(\alpha) D_p^\alpha(u) + u_{4t} + \|u\|^2 u - \|u\|^4 u = 0 \quad (6.7)$$

donde  $u$  es una función compleja,  $\alpha$ ,  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  números reales y  $c$  y  $d$  funciones reales.

En [20] se muestra la gráfica que se reproduce abajo. En ella podemos observar la evolución de un pulso que obedece a la ecuación (6.7). Podemos ver que el pulso disminuye de tamaño, pero luego se estabiliza, y continúa avanzando sin destruirse. Este resultado demuestra que la ecuación (6.7) acepta la propagación de solitones.

**Figura 6.1:** Solución de la ecuación diferencial fraccionaria con  $\alpha = 2.9$



### 6.2.2. Una lagrangiana para un sistema descrito en términos de derivadas fraccionarias centradas

Para usar por primera vez nuestra nueva herramienta hemos seleccionado la ecuación (6.7). Postularemos una función lagrangiana y comprobaremos que, al sustituirla en (6.6), nos arroja (6.7) (en este punto es importante mencionar que el trabajo de Manuel Velasco [20] no hace uso de ninguna herramienta variacional, de la formulación lagrangiana o del teorema de Noether).

Sobre cómo obtener la función a proponer, ha de decirse que una función lagrangiana no puede, en general, obtenerse mediante algún método deductivo partiendo de dentro de la misma teoría. Es menester en muchos casos (como en este), construirla modificando a prueba y error alguna otra función intentando que, al sustituirla en el conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange, arrojen una ecuación conocida a priori.

Proponemos, pues, la siguiente lagrangiana:

**Definición 6.2.1.** Sea  $\mathcal{L}$  una lagrangiana definida como:

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2}(uu_z^* - u^*u_z) + u_{tt}u_{tt}^* + \frac{1}{2}u^2u^{*2} - \frac{1}{3}u^3u^{*3} - \quad (6.8)$$

$$\frac{1}{2}\epsilon_1 c(\alpha)u^*D_p^\alpha(u) + \frac{i}{2}\epsilon_2 d(\alpha)u^*D_i^\alpha(u) - \frac{1}{2}\epsilon_1 c(\alpha)uD_p^\alpha(u^*) - \frac{i}{2}\epsilon_2 d(\alpha)uD_i^\alpha(u^*)$$

donde \* indica conjugación compleja.

Ahora bien ¿esta ecuación, al ser sustituida en (6.6) arroja nuestra ecuación (6.7)? En efecto, observemos que en la lagrangiana sólo tenemos un término correspondiendo con la primera derivada de u respecto de z y uno con la segunda respecto de t, la ecuación de Euler-Lagrange entonces se reduce a la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} + D_p^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(u)} - D_i^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(u)} = 0 \quad (6.9)$$

Al calcular las derivadas tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} &= -\frac{i}{2}u_z^* + uu^{*2} - u^2u^{*3} - \frac{1}{2}\epsilon_1 c(\alpha)D_p^\alpha u^* - \frac{i}{2}\epsilon_2 d(\alpha)D_i^\alpha u^* \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} &= \frac{i}{2}u_z^* \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} &= u_{4t}^* \\ D_p^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(u)} &= -\frac{1}{2}\epsilon_1 c(\alpha)D_p^\alpha u \\ D_i^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(u^*)} &= -\frac{i}{2}\epsilon_2 d(\alpha)D_i^\alpha(u^*) \end{aligned}$$

y si consideramos que  $uu^{*2} = \|u\|^2u^*$  y  $u^2u^{*3} = \|u\|^4u^*$ , la ecuación de Euler-Lagrange se vuelve:

$$-iu_z^* - i\epsilon_2 d(\alpha)D_i^\alpha(u^*) - \epsilon_1 c(\alpha)D_p^\alpha(u^*) + u_{4t}^* + \|u\|^2u^* - \|u\|^4u^* = 0 \quad (6.10)$$

que, tomando el complejo conjugado, nos devuelve a la ecuación (6.7), por lo que la lagrangiana propuesta (6.2.1) sirve para obtener esta ecuación. Debemos remarcar que esta lagrangiana no es necesariamente única, pero no necesita serlo.

Hasta ahora hemos demostrado que podemos construir lagrangianas que incluyan derivadas fraccionarias centradas, pero puesto que para construirlas necesitamos conocer a priori la ecuación diferencial fraccionaria que describe al sistema en cuestión, esto no aporta una ventaja

operativa en ningún caso. Hemos de buscar, en el siguiente capítulo, la herramienta matemática que nos falta para poder volver útil la maquinaria que aquí hemos desarrollado: un teorema de Noether fraccionario.



---

# Teorema de Noether fraccionario

---

Como parte final de nuestro recorrido hemos de buscar extender el resultado del teorema de Noether para considerar sistemas cuyas lagrangianas dependen de funciones de varias variables y sus derivadas fraccionarias centradas. Hemos recorrido una parte importante del camino pues ya tenemos certeza de que existe un juego de ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas con estas lagrangianas y más aún: ya tenemos un ejemplo donde hemos visto que estas ecuaciones dan lugar a la ecuación que describe un sistema de interés. Procedamos pues, a buscar nuestro cometido, y lo haremos en el siguiente orden.

- Punto de partida (donde se recuerda lo que se ha hecho en el caso de derivadas enteras)
- Enunciado y demostración
- Ejemplo: búsqueda de cantidades conservadas

## 7.1. Punto de partida

Del Capítulo tres podemos recordar que el hallazgo de cantidades conservadas se hizo, grosso modo, de la siguiente manera.

1. Se buscó, a partir de la invariancia de la acción, una exigencia similar sobre la Lagrangiana
2. Se observó que el campo físico en cuestión debía satisfacer un conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange
3. A partir de lo anterior y de propiedades sobre la derivada, se logró agrupar los términos de la variación de la lagrangiana en la forma de una divergencia.

El procedimiento del punto 1 es transparente y sigue siendo válido, notando que se deben agregar dos términos más a la variación de la lagrangiana, producto de la dependencia en las derivadas fraccionarias centradas en el tiempo. Es necesario verificar qué forma adquieren dichos términos antes de seguir el camino.

Por otra parte, en el capítulo anterior pudimos hallar el conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange, lo que nos da buenas perspectivas. Estamos pues, en el punto donde debemos sustituir los dos ingredientes mencionados y observar si se pueden replicar los otros.

## 7.2. Enunciado y demostración

**Teorema 5.** Sean  $x_1$  y  $x_2$  variables independientes,  $q_1(x_1, x_2)$  y  $q_2(x_1, x_2)$  funciones de ellas y

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, q_{1,x_1}, q_{1,x_2}, \dots, q_{1, nx_2} \dots, q_{2,x_1}, q_{2,x_2}, \dots, q_{2, mx_2} \dots,$$

$${}_x D_p^\alpha(q_1), {}_x D_i^\alpha(q_1), {}_x D_p^\alpha(q_2), {}_x D_i^\alpha(q_2))$$

una densidad lagrangiana donde  $D_p^\alpha, D_i^\alpha$  son las derivadas fraccionarias centradas con respecto de  $x_2$ <sup>1</sup>. Si bajo las transformaciones

$$x_1^* = x_1 + \epsilon \xi_1$$

$$x_2^* = x_2 + \epsilon \xi_2$$

(7.1)

$$q_1^*(x_1^*, x_2^*) = q_1(x_1, x_2) + \epsilon \phi_1(q_1(x_1, x_2))$$

$$q_2^*(x_1^*, x_2^*) = q_2(x_1, x_2) + \epsilon \phi_2(q_2(x_1, x_2))$$

con  $\epsilon < 0$  el parámetro de la transformación,  $\xi_1, \xi_2$  números reales,  $\phi_1(q_1)$  y  $\phi_2(q_2)$  funciones complejas, se cumple que:

$$\begin{aligned} S &= \int \int_{\Omega} \mathcal{L}(q_1, q_2, q_{1,x_1}, q_{1,x_2}, q_{1,2x_2} \dots, q_{1, nx_2} \dots, q_{2,x_1}, q_{2,x_2}, q_{2,2x_2} \dots, q_{2, mx_2} \dots, \\ &\quad D_p^\alpha(q_1), D_i^\alpha(q_1), D_p^\alpha(q_2), D_i^\alpha(q_2)) dx_1 dx_2 \\ &= \int \int_{\Omega^*} \mathcal{L}(q_1^*, q_2^*, q_{1,x_1^*}, q_{1,x_2^*}, q_{1,2x_2^*} \dots, q_{1, nx_2^*} \dots, q_{2,x_1^*}, q_{2,x_2^*}, q_{2,2x_2^*} \dots, q_{2, mx_2^*} \dots, D_p^\alpha(q_1^*), \\ &\quad D_i^\alpha(q_1^*), D_p^\alpha(q_2^*), D_i^\alpha(q_2^*)) dx_1^* dx_2^* \end{aligned} \tag{7.2}$$

entonces existe una ley de conservación de la forma:

---

<sup>1</sup>Únicamente tenemos una de las variables por simplicidad de los procedimientos. Exploraciones considerando las dos o más variables independientes quedan fuera del alcance de este trabajo.

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + P = 0 \quad (7.3)$$

con  $Q = Q_1, Q_2$  función de  $q_1, q_2$  y sus derivadas enteras y fraccionarias y  $P$  una función que se anula al ser integrada en  $x_2$

Es interesante observar que en la ecuación (7.3), aparece el término  $P$ , que no aparecía cuando la lagrangiana sólo dependía de derivadas de orden entero.

Observemos nuevamente las relaciones (7.1): bajo estas transformaciones, las derivadas fraccionarias adquieren la forma

$$\begin{aligned} D_p^\alpha(q_1)(x_1^*, x_2^*) &= D_p^\alpha(q_1(x_1, x_2)) + \epsilon D_p^\alpha(\phi_1(q_1(x_1, x_2))) \\ D_i^\alpha(q_1)(x_1^*, x_2^*) &= D_i^\alpha(q_1(x_1, x_2)) + \epsilon D_i^\alpha(\phi_1(q_1(x_1, x_2))) \\ D_p^\alpha(q_2)(x_1^*, x_2^*) &= D_p^\alpha(q_2(x_1, x_2)) + \epsilon D_p^\alpha(\phi_2(q_2(x_1, x_2))) \\ D_i^\alpha(q_2)(x_1^*, x_2^*) &= D_i^\alpha(q_2(x_1, x_2)) + \epsilon D_i^\alpha(\phi_2(q_2(x_1, x_2))) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Por un procedimiento igual que en el caso de derivadas enteras, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega^*} \mathcal{L}(q_1^*, q_2^*, q_{1,x_1}^*, q_{1,x_2}^*, q_{1,2x_2}^* \dots, q_{1,nx_2}^* \dots, q_{2,x_1}^*, q_{2,x_2}^*, q_{2,2x_2}^* \dots, q_{2,mx_2}^* \dots) dx_1^* dx_2^* = \\ \int \int_{\Omega} \mathcal{L}(q_1 + \epsilon \phi_1, q_{1,x_1} + \epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} q_{1,x_1}, q_{1,x_2} + \epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} q_{1,x_2}, \dots, \\ q_2 + \epsilon \phi_2, q_{2,x_1} + \epsilon \frac{\partial \phi_2}{\partial q_2} q_{2,x_1}, q_{2,x_2} + \epsilon \frac{\partial \phi_2}{\partial q_2} q_{2,x_2}, \dots, D_p^\alpha(q_1(x_1, x_2)) + \epsilon D_p^\alpha(\phi(q_1(x_1, x_2))), \\ , D_i^\alpha(q_1(x_1, x_2)) + \epsilon D_i^\alpha(\phi(q_1(x_1, x_2))), D_p^\alpha(q_2(x_1, x_2)) + \epsilon D_p^\alpha(\phi(q_2(x_1, x_2))), \\ D_i^\alpha(q_2(x_1, x_2)) + \epsilon D_i^\alpha(\phi(q_2(x_1, x_2)))) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Esta expresión resulta muy larga, pero notemos que todo ya lo hemos hecho, o casi todo. Si expandimos en serie de Taylor la lagrangiana, podemos ver que la condición de invariancia se vuelve:

$$\begin{aligned} 0 = \int \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \delta q_{1,x_1} + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots \\ + \frac{\delta \mathcal{L}}{D_p^\alpha(q_1)} \delta D_p^\alpha(q_1) + \frac{\delta \mathcal{L}}{D_i^\alpha(q_1)} \delta D_i^\alpha(q_1) + \frac{\delta \mathcal{L}}{D_p^\alpha(q_2)} \delta D_p^\alpha(q_2) + \frac{\delta \mathcal{L}}{D_i^\alpha(q_2)} \delta D_i^\alpha(q_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (7.6)$$

Como probamos en el capítulo anterior, existe un conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange (6.6) y si lo sustituimos y consideramos que  $\delta D_p^\alpha(q_1) = D_p^\alpha(\delta q_1)$ ,  $\delta D_i^\alpha(q_1) = D_i^\alpha(\delta q_1)$ ,  $\delta q_{1,nx_1} = \frac{\partial^n}{\partial x_1^n}(\delta q_1)$ ,  $\delta q_{1,nx_2} = \frac{\partial^n}{\partial x_2^n}(\delta q_1)$  y relaciones similares para  $q_2$ , tenemos:



$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \delta x_2 \\
 &+ \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_1}} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_2}} + \dots \right] \delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \delta q_1 + \dots \\
 &+ \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_1}} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_2}} + \dots \right] \delta q_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \delta q_2 + \dots \\
 &+ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(q_1)} D_p^\alpha \delta(q_1) - D_p^\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(q_1)} \right) \delta q_1 \right] + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(q_1)} D_i^\alpha \delta(q_1) + D_i^\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(q_1)} \right) \delta q_1 \right] \\
 &+ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(q_2)} D_p^\alpha \delta(q_2) - D_p^\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(q_2)} \right) \delta q_2 \right] + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(q_2)} D_i^\alpha \delta(q_2) + D_i^\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(q_2)} \right) \delta q_2 \right]
 \end{aligned}$$

Esto implica si de nuevo hacemos la identificación de algunos productos de derivadas (este paso es exactamente el mismo que en el capítulo 3, pues dicha identificación no incluye a los términos con derivadas fraccionarias):

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} \delta q_2 \right] \\
 &+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} \delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} \delta q_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_2}} \delta q_1 \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_2}} \delta q_2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_2 \dots \right] \\
 &+ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(q_1)} D_p^\alpha \delta(q_1) - D_p^\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(q_1)} \right) \delta q_1 \right] + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(q_1)} D_i^\alpha \delta(q_1) + D_i^\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(q_1)} \right) \delta q_1 \right] \\
 &+ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(q_2)} D_p^\alpha \delta(q_2) - D_p^\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(q_2)} \right) \delta q_2 \right] + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(q_2)} D_i^\alpha \delta(q_2) + D_i^\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(q_2)} \right) \delta q_2 \right]
 \end{aligned}$$

Y si recordamos las definiciones de las transformaciones, (7.1) esto queda como:

$$\begin{aligned}
 &\epsilon \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \xi_1 \mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \delta q_1 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} \delta q_2 \right] + \\
 &\epsilon \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \xi_2 \mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} \delta q_1 - \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} \right) \delta q_1 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_1 - \dots + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} \delta q_2 - \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} \right) \delta q_2 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_2 \dots \right] + \\
 &+ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(q_1)} D_p^\alpha \delta(q_1) - D_p^\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(q_1)} \right) \delta q_1 \right] + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(q_1)} D_i^\alpha \delta(q_1) + D_i^\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(q_1)} \right) \delta q_1 \right] \\
 &+ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(q_2)} D_p^\alpha \delta(q_2) - D_p^\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(q_2)} \right) \delta q_2 \right] + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(q_2)} D_i^\alpha \delta(q_2) + D_i^\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(q_2)} \right) \delta q_2 \right] = 0
 \end{aligned}$$

Por lo que si definimos:

$$Q_1 := \epsilon \left[ \xi_1 \mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \delta q_1 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} \delta q_2 \right] \quad (7.7)$$

y

$$Q_2 := \epsilon \left[ \xi_2 \mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} \delta q_1 - \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_2}} \right) \delta q_1 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,2x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_1 - \dots + \right. \\ \left. \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} \delta q_2 - \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_2}} \right) \delta q_2 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,2x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta q_2 \dots \right] \quad (7.8)$$

esto tiene la forma:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + P = 0 \quad (7.9)$$

donde P, al ser integrado sobre  $x_2$  se anula. Por lo que tenemos una ley de conservación.

### 7.3. Aplicación del teorema para una lagrangiana que produce una ecuación NLS extendida fraccionaria

Para mostrar una aplicación del resultado recién probado, volvamos a la ecuación (6.7) y observemos la lagrangiana que postulamos (6.2.1) y que, según probamos, da lugar a dicha ecuación. Vamos a utilizar el teorema recién probado para ilustrar cantidades conservadas a las que da lugar dicha lagrangiana.

#### 7.3.1. Ejemplo 1: Transformaciones de norma

Consideremos la siguiente transformación, considerando  $v \equiv u^*$ :

$$\begin{aligned} u^\dagger &= u + i\epsilon u \\ v^\dagger &= v - i\epsilon v \\ z^\dagger &= z \\ t^\dagger &= t \end{aligned} \quad (7.10)$$

lo cual implica:

$$\begin{aligned} \delta u &= i\epsilon u \\ \delta v &= -i\epsilon v \end{aligned} \quad (7.11)$$

Y consideramos  $x_1 = z$  y  $x_2 = t$

Si observamos la variación (7.6), requerimos los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \delta z &= 0 \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t &= 0 \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u &= i\epsilon u \left[ -\frac{i}{2} u_z^* + u u^{*2} - u^2 u^{*3} - \frac{1}{2} \eta_1 c(\alpha) D_p^\alpha(u^*) - \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) D_i^\alpha(u^*) \right] \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \delta u_z &= i\epsilon u_z \left( \frac{i}{2} u^* \right) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{2t}} \delta u_{2t} &= i\epsilon u_{2t} (u_{2t}^*) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha u} \delta D_p^\alpha u &= i\epsilon D_p^\alpha u \left[ -\frac{i}{2} \eta_1 c(\alpha) u^* \right] \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha u} \delta D_i^\alpha u &= i\epsilon D_i^\alpha u \left[ \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) u^* \right]
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

para la función  $u$ , mientras que para la otra que en este caso es su complejo conjugado, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \delta v &= -i\epsilon u^* \left[ \frac{i}{2} u_z^* + u^2 u^* - u^3 u^{*2} + \frac{i}{2} \eta_1 c(\alpha) D_p^\alpha(u) - \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) D_i^\alpha(u) \right] \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} \delta v_z &= i\epsilon u_z^* \left( \frac{i}{2} u \right) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{2t}} \delta v_{2t} &= -i\epsilon u_{2t}^* (u_{2t}) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha v} \delta D_p^\alpha v &= i\epsilon D_p^\alpha u^* c(\alpha) \left[ \frac{1}{2} \eta_1 c(\alpha) u \right] \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha v} \delta D_i^\alpha v &= i\epsilon D_i^\alpha u^* d(\alpha) \left[ \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) u \right]
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

Al ser sumadas todas las contribuciones, la variación resulta ser igual a cero. Ahora consideremos pulsos de la forma mostrada en la figura 6.1 mostrada en el capítulo anterior. Esta gráfica representa un pulso luminoso en una fibra óptica y, como se puede apreciar, la solución  $u$  tiende a cero en  $t = -\infty$  y  $t = \infty$ , por lo que existe una cantidad conservada para todo valor de  $z$ . Esta cantidad tiene la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_1 dt := \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \left[ \xi_1 \mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \delta q_1 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} \delta q_2 \right] dt \tag{7.14}$$

y debemos recordar que  $\xi_1 = 0$ , por lo que la cantidad conservada es igual a:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} Q_1 dt &= \frac{1}{\epsilon} \left[ i\epsilon u \frac{i}{2} u^* + i\epsilon u^* \left( \frac{i}{2} u \right) \right] \\
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (u u^* + u^* u) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dt
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

lo cual implica que  $\int_{-\infty}^{\infty} |u| dt$  es una cantidad conservada del sistema, que en este caso corresponde a la energía. Normalmente, la energía se obtiene como cantidad conservada al existir invarianzas ante transformaciones temporales, sin embargo, por la forma en la que se describe un sistema consistente de un pulso viajando por una fibra óptica, obtenemos la conservación de la energía cuando se tiene invarianza ante traslaciones en la variable  $z$ . Puede verse el apéndice para más información.

### 7.3.2. Ejemplo 2: traslaciones en $z$

Consideremos ahora la siguiente transformación, nuevamente considerando  $v \equiv u^*$ :

$$\begin{aligned} u^\dagger &= u \\ v^\dagger &= v \\ z^\dagger &= z + \eta \\ t^\dagger &= t \end{aligned} \tag{7.16}$$

Para observar la forma que adquieren las variaciones de  $u$  y  $v$ , en este caso debemos considerar que la variación será tomada como el término lineal de una expansión en serie de potencias de las funciones  $u^\dagger - u$  y  $v^\dagger - v$ . De esta forma, la variación en  $u$ ,  $\delta u$ , es el resultado de expandir:

$$\delta u = u^\dagger(z^\dagger, t^\dagger) - u(z, t) \tag{7.17}$$

La anterior, considerando de las transformaciones (7.16) que  $t^\dagger = t$  y  $z = z^\dagger - \eta$ , resulta igual a

$$\delta u = u^\dagger(z^\dagger, t^\dagger) - u(z^\dagger - \eta, t^\dagger) \tag{7.18}$$

que, a primer orden es

$$\delta u = u^\dagger(z^\dagger, t^\dagger) - u(z^\dagger, t^\dagger) - \eta u_z = -\eta u_z \tag{7.19}$$

Un procedimiento análogo para la variación  $\delta v$  resulta en:

$$\begin{aligned} \delta u &= -\eta u_z \\ \delta v &= -\eta v_z \end{aligned} \tag{7.20}$$

por lo que las variaciones son:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \delta z = & \eta \left[ -\frac{i}{2} (u_z u_z^* + u u_{2z}^* - u_z^* u_z - u^* u_{2z}) \right. \\
 & + u_{ztt} u_{tt}^* + u_{tt} u_{ztt}^* + \frac{1}{2} (2u u_z u^* + 2u^2 u^* u_z^*) \\
 & - \frac{1}{3} (3u^2 u_z u^* + 3u^3 u^* u_z^*) - \frac{1}{2} \eta_1 c(\alpha) (u_z^* D_p^\alpha u + u^* D_p^\alpha u_z) \\
 & + \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) (u_z^* D_i^\alpha u + u^* D_i^\alpha u_z) - \frac{1}{2} \eta_1 c(\alpha) (u_z D_p^\alpha u^* + u D_p^\alpha u_z^*) \\
 & \left. - \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) (u_z D_i^\alpha u^* + u D_i^\alpha u_z^*) \right] \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t = & 0 \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u = & -\eta u_z \left[ -\frac{i}{2} u_z^* + u u^* - u^2 u^* - \frac{1}{2} \eta_1 c(\alpha) D_p^\alpha (u^*) - \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) D_i^\alpha (u^*) \right] \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \delta u_z = & -\eta u_{2z} \left( \frac{i}{2} u^* \right) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{2t}} \delta u_{2t} = & -\eta u_{z2t} (u_{2t}^*) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha u} \delta D_p^\alpha u = & -\eta D_p^\alpha u_z \left[ -\frac{i}{2} \eta_1 c(\alpha) u^* \right] \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha u} \delta D_i^\alpha u = & -\eta D_i^\alpha u_z \left[ \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) u^* \right]
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

para  $u$ , mientras que para  $v$  se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \delta v = & -\eta u_z^* \left[ \frac{i}{2} u_z + u^2 u^* - u^3 u^* - \frac{i}{2} \eta_1 c(\alpha) D_p^\alpha (u) + \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) D_i^\alpha (u) \right] \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} \delta v_z = & \eta u_{2z}^* \left( \frac{i}{2} u \right) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{2t}} \delta v_{2t} = & -\eta u_{z2t}^* (u_{2t}) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha v} \delta D_p^\alpha v = & \eta D_p^\alpha u_z^* c(\alpha) \left[ \frac{1}{2} \eta_1 c(\alpha) u \right] \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha v} \delta D_i^\alpha v = & \eta D_i^\alpha u_z^* d(\alpha) \left[ \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) u \right]
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

Al sumar todos los términos, se tiene como resultado 0, lo que implica una ley de conservación según el teorema probado. Observemos que la cantidad conservada tiene la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_1 dt := \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \left[ \xi_1 \mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \delta q_1 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} \delta q_2 \right] dt \tag{7.23}$$

por lo que si integramos en el tiempo y sustituimos los valores, tenemos que se conserva lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \left[ \mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \delta u + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} \delta v \right] dt \quad (7.24)$$

que tiene el valor:

$$\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{L} + uu_z^* - u^* u_z) dt \quad (7.25)$$

a lo largo de  $z$ . Al reemplazar la lagrangiana (6.2.1), tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = cte = \int_{-\infty}^{\infty} & \left( -\frac{i}{2} (uu_z^* - u^* u_z) + u_{tt} u_{tt}^* + \frac{1}{2} u^2 u^{*2} - \frac{1}{3} u^3 u^{*3} - \right. \\ & \frac{1}{2} \eta_1 c(\alpha) u^* D_p^\alpha(u) + \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) u^* D_i^\alpha(u) - \frac{1}{2} \eta_1 c(\alpha) u D_p^\alpha(u^*) - \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) u D_i^\alpha(u^*) \\ & \left. + uu_z^* - u^* u_z \right) dt \end{aligned} \quad (7.26)$$

donde el integrando que aparece en esta ecuación, recordando la función hamiltoniana en mecánica clásica, definida por  $\mathcal{H} := \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$ , es la densidad hamiltoniana correspondiente a la lagrangiana (6.2.1).

### 7.3.3. Ejemplo 3: traslaciones en $t$

Consideremos ahora la siguiente transformación, nuevamente considerando  $v \equiv u^*$ :

$$\begin{aligned} u^\dagger &= u \\ v^\dagger &= v \\ z^\dagger &= z \\ t^\dagger &= t + \eta \end{aligned} \quad (7.27)$$

Estas ecuaciones implican que:

$$\begin{aligned} \delta u &= -\eta u_t \\ \delta v &= -\eta v_t \end{aligned} \quad (7.28)$$

por lo que las variaciones son:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t = & \eta \left[ -\frac{i}{2} (u_t u_z^* + u u_{tz}^* - u_t^* u_z - u^* u_{tz}) \right. \\
 & + u_{3t} u_{tt}^* + u_{tt} u_{3t}^* + \frac{1}{2} \left( 2u u_t u^{*2} + 2u^2 u^* u_t^* \right) \\
 & - \frac{1}{3} \left( 3u^2 u_t u^{*3} + 3u^3 u^{*2} u_t^* \right) - \frac{1}{2} \eta_1 c(\alpha) (u_t^* D_p^\alpha u + u^* D_p^\alpha u_t) \\
 & + \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) (u_t^* D_i^\alpha u + u^* D_i^\alpha u_t) - \frac{1}{2} \eta_1 c(\alpha) (u_t D_p^\alpha u^* + u D_p^\alpha u_t^*) \\
 & \left. - \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) (u_t D_i^\alpha u^* + u D_i^\alpha u_t^*) \right] \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t = & 0 \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u = & -\eta u_t \left[ -\frac{i}{2} u_z^* + u u^{*2} - u^2 u^{*3} - \frac{1}{2} \eta_1 c(\alpha) D_p^\alpha (u^*) - \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) D_i^\alpha (u^*) \right] \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \delta u_z = & -\eta u_{tz} \left( \frac{i}{2} u^* \right) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{2t}} \delta u_{2t} = & -\eta u_{3t} (u_{2t}^*) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha u} \delta D_p^\alpha u = & -\eta D_p^\alpha u_t \left[ -\frac{i}{2} \eta_1 c(\alpha) u^* \right] \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha u} \delta D_i^\alpha u = & -\eta D_i^\alpha u_t \left[ \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) u^* \right]
 \end{aligned} \tag{7.29}$$

para  $u$ , mientras que para su conjuada se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \delta v = & -\eta u_t^* \left[ \frac{i}{2} u_z + u^2 u^* - u^3 u^{*2} - \frac{i}{2} \eta_1 c(\alpha) D_p^\alpha (u) + \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) D_i^\alpha (u) \right] \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} \delta v_z = & \eta u_{tz}^* \left( \frac{i}{2} u \right) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{2t}} \delta v_{2t} = & -\eta u_{3t}^* (u_{2t}) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha v} \delta D_p^\alpha v = & \eta D_p^\alpha u_t^* c(\alpha) \left[ \frac{1}{2} \eta_1 c(\alpha) u \right] \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha v} \delta D_i^\alpha v = & \eta D_i^\alpha u_t^* d(\alpha) \left[ \frac{i}{2} \eta_2 d(\alpha) u \right]
 \end{aligned} \tag{7.30}$$

Nuevamente, la suma de todos los términos es cero, por lo que la cantidad de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_1 dt := \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \left[ \xi_1 \mathcal{L} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{1,x_1}} \delta q_1 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{2,x_1}} \delta q_2 \right] dt \tag{7.31}$$

al ser integrada, se conserva a lo largo de  $z$ . Esta expresión resulta ser:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \left[ \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \delta u + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} \delta v \right] dt \tag{7.32}$$

que tiene el valor:

$$\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (uu_t^* - u^*u_t) dt \quad (7.33)$$

La cantidad conservada aquí mostrada es análoga a lo que sería el “momento” en mecánica clásica.

De esta forma hemos mostrado que la energía, la hamiltoniana y el momento son cantidades conservadas, lo cual muestra que la ecuación (6.7) (cuya lagrangiana es (6.2.1)) describe un sistema que no viola las leyes de conservación relacionadas a estas cantidades. Es importante mencionar que esto no es suficiente para asegurar la existencia de ese sistema físico.

Con este ejemplo concluimos la muestra de la última herramienta desarrollada. Hemos observado que se puede extender el teorema de Noether para sistemas descritos con derivadas fraccionarias centradas. Por la novedad que representan dichas derivadas, hemos desarrollado herramientas que no han sido reportadas en la bibliografía, por lo que es natural que no se hallen más ejemplos. Existe, sin embargo, la esperanza de que estas herramientas contribuyan a hallar nichos de aplicación de las derivadas fraccionarias de Duarte-Ortigueira y del cálculo fraccionario en general, como una herramienta que facilite la descripción de sistemas cuya dinámica no es trivial.

#### 7.3.4. Resumen de resultados

En esta sección se hallaron tres relaciones de conservación:

- Conservación de la energía, asociada a una transformación que hemos llamado “de norma”
- Conservación de la densidad lagrangiana, asociada a la invariancia ante traslaciones en la variable  $z$
- Conservación de una cantidad que reconocemos como el momento, asociada a una invariancia ante traslaciones en la variable  $t$

Al lector interesado en entender por qué la conservación de la energía no surge, como comúnmente de una invariancia ante traslaciones en la variable temporal, o sobre por qué el momento surge de invariancias ante traslaciones en la variable  $t$ , se le invita a acudir al apéndice.





---

Capítulo 8

# Conclusiones

---

Durante los pasados capítulos se presentó, primero una introducción que presentó el tema de las derivadas fraccionarias y, seguidamente se desarrollaron los temas de la formulación Lagrangiana de sistemas con varios grados de libertad y varias variables y se desarrolló una versión simplificada del teorema de Noether y se presentó, con más formalidad, el tema del cálculo fraccionario y en particular las derivadas fraccionarias centradas de Duarte Ortigueira.

Llegando a este punto, se mostró que se obtuvo, para las derivadas fraccionarias centradas:

1. Un conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas descritos con una lagrangiana que dependa de varias funciones con dos variables independientes y sus derivadas, enteras y fraccionarias:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} + \sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial z^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{iz}} + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{jt}} + \\ D_p^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_p^\alpha(u)} - D_i^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_i^\alpha(u)} = 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

2. Se propuso la siguiente lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = -\frac{i}{2}(uu_z^* - u^*u_z) + u_{tt}u_{tt}^* + \frac{1}{2}u^2u^{*2} - \frac{1}{3}u^3u^{*3} - \\ \frac{1}{2}\epsilon_1 c(\alpha)u^*D_p^\alpha(u) + \frac{i}{2}\epsilon_2 d(\alpha)u^*D_i^\alpha(u) - \frac{1}{2}\epsilon_1 c(\alpha)uD_p^\alpha(u^*) - \frac{i}{2}\epsilon_2 d(\alpha)uD_i^\alpha(u^*) \end{aligned} \quad (8.2)$$

y se mostró que, sustituyéndola en las ecuaciones anteriores, permite recuperar la ecuación tipo NLS:

$$iu_z + i\epsilon_2 d(\alpha)D_i^\alpha(u) - \epsilon_1 c(\alpha)D_p^\alpha(u) + u_{4t} + \|u\|^2u - \|u\|^4u = 0 \quad (8.3)$$

que tiene soluciones con forma de solitón. Aunque esta ecuación ya había sido tratada en [20], no se habían utilizado herramientas variacionales para su estudio, por lo que el resultado es nuevo.

3. Un teorema que permite relacionar invariancias de sistemas descritos por las lagrangianas antes mencionadas, con la conservación de ciertas cantidades del sistema. Llamamos a teoremas de este tipo, teoremas de Noether fraccionarios. Según los alcances de esta investigación, existen teoremas para sistemas descritos por lagrangianas que dependen de

derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov etc, pero no existían para sistemas con derivadas fraccionarias centradas.

4. Utilizando este teorema, se mostró que en el sistema descrito por Velasco (correspondiente al segundo punto de esta lista) se conservan la energía, la hamiltoniana y el momento. Este sistema es de interés en el campo de la óptica y de las telecomunicaciones basadas en fibras ópticas.

Aunque el ejemplo utilizado a lo largo de este trabajo fue la ecuación NLS aplicada en sistemas ópticos, se desconoce si la aplicación práctica de los resultados de esta tesis en el área de las fibras ópticas, está cerca. Sin embargo, las derivadas fraccionarias centradas son relativamente nuevas, por lo que el interés es apenas incipiente y podemos esperar que la atracción que se ha ido despertando ayude a dilucidar esta cuestión. Las derivadas fraccionarias de otros tipos han sido ya utilizadas en muchos sistemas, pero las derivadas fraccionarias centradas tienen ventajas como no depender de una dirección específica a partir del punto de evaluación, que pueden ofrecer ventajas en campos como los sistemas estocásticos sub y súper difusivos.

Finalmente, el autor está convencido de que cualquier nueva herramienta matemática puede ayudarnos a describir mejor algunos sistemas físicos y espera que este trabajo sea útil para hacernos de nuevos instrumentos que ayuden al quehacer científico.

## Interpretación de la ecuación tipo NLS fraccionaria y cantidades conservadas

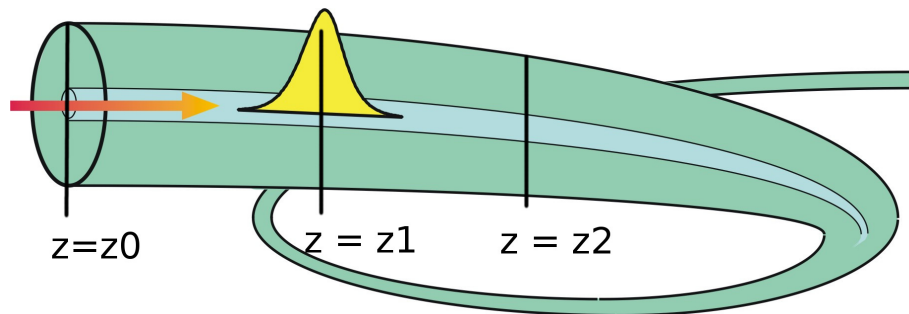
En el Capítulo 7 se obtuvo se mostró que la acción permanece invariante ante un conjunto de transformaciones y se hallaron sendas cantidades conservadas, sin embargo, las cantidades conservadas no corresponden las transformaciones típicas.

Normalmente, una invariancia ante traslaciones temporales da lugar a la conservación de la energía y una invariancia ante traslaciones espaciales da lugar a la conservación de alguna componente del momento lineal. En nuestro caso, sin embargo, hallamos la conservación de la energía cuando exploramos traslaciones en la variable  $z$  y ante traslaciones en la variable  $t$ , nos hallamos con algo que llamamos “momento”.

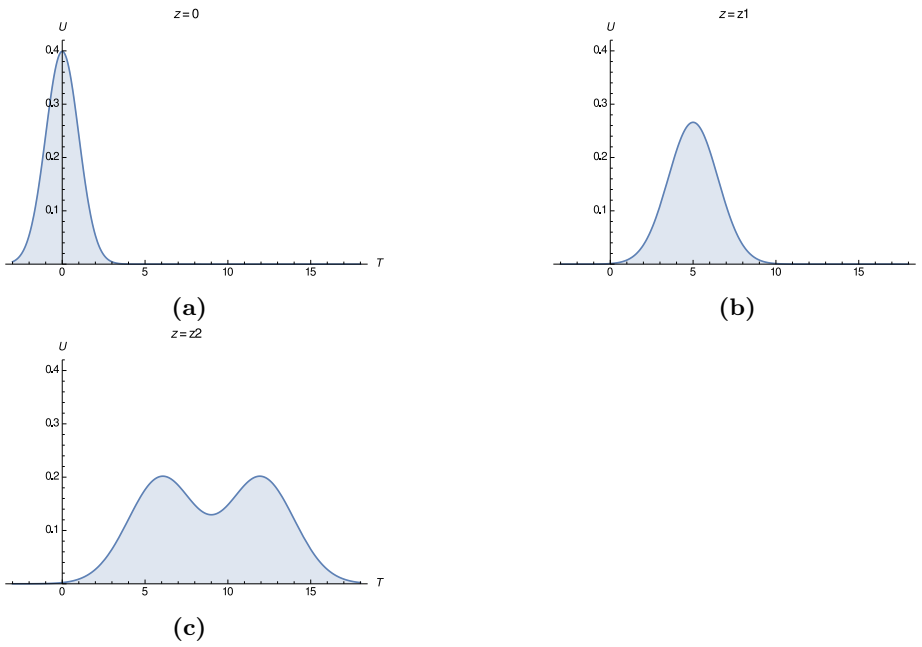
Para entender bien por qué sucede esto, es menester dar una explicación sobre cómo suele interpretarse la solución a la ecuación (6.7). Comencemos.

Consideremos que la cantidad  $u$  tiene unidades de campo eléctrico y que enviamos un pulso en  $z = z_0 = 0$ . Este pulso viene de una fuente de luz que podemos controlar para todo tiempo  $T$ . Ahora imaginemos que tenemos 3 observadores en  $z = z_0$ ,  $z = z_1$  y  $z = z_2$  como se muestra en la figura 1.

**Figura 1:** Esquema de una fibra óptica con observadores en 3 puntos diferentes



Como la velocidad de la luz es finita, cada observador “verá” pasar el pulso en diferentes instantes. En cada uno de estos instantes, el pulso puede haber cambiado de forma, así, observemos que el observador uno (figura 2a) observa el pulso a  $t = 0$ , y los otros observadores (figuras 2b y 2c) lo observan en momentos diferentes y, probablemente, modificados en forma o tamaño. En este caso, para definir las propiedades hay que hacer referencia tanto al tiempo  $T$  como a la posición  $z$ .



**Figura 2:**  $u$  en función del tiempo  $T$  para observadores en diferentes valores de  $z$

En el campo de los solitones ópticos se suele hacer un cambio de variable, proponiendo:

$$t = T - \beta Z \quad (4)$$

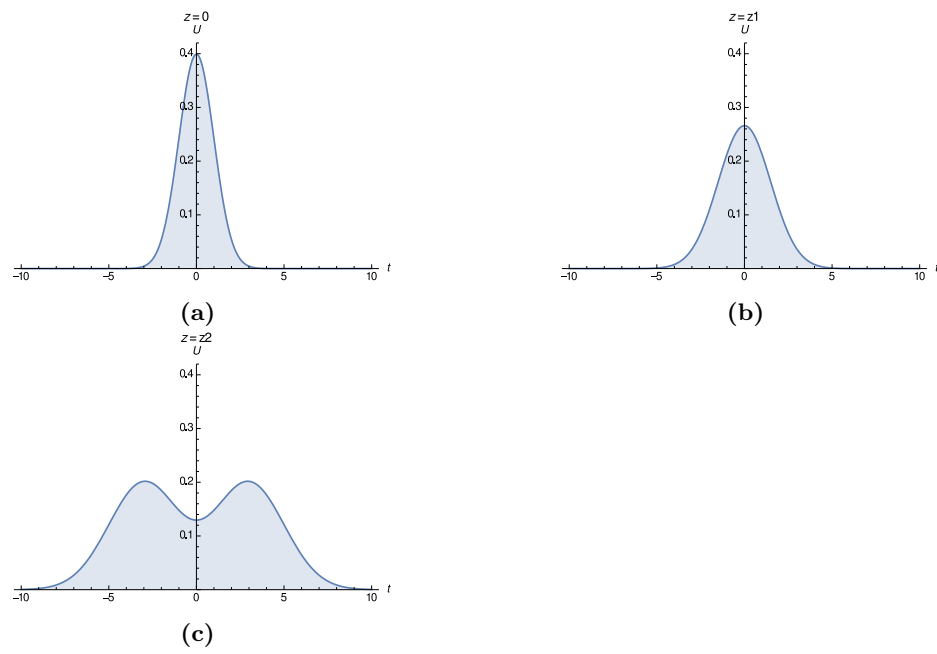
donde  $\beta$  es el inverso multiplicativo de la velocidad de luz en la fibra óptica y a  $t$  se le llama el “tiempo retardado”.

Con este cambio de variable, se puede observar que, sin importar la posición  $z$ , el pulso luminoso siempre se observa en  $t = 0$ , como se muestra en las figuras 3a, 3b y 3c.

Como se puede notar, con esta nueva coordenada  $t$ , la descripción del pulso luminoso depende sólo del cambio en la coordenada  $z$ .

Considerando lo anterior, es de esperarse que al existir invariancias ante traslaciones en  $z$  se obtenga la conservación de la energía, pues en este caso,  $z$  juega el papel que antes jugaba  $T$ , el de variable de evolución del sistema.

De las consideraciones anteriores se observa también que la expresión (7.33) solo se ha llamado “momento” como una analogía a la mecánica clásica, pero que no tiene un significado físico tan claro.



**Figura 3:**  $u$  en función del “tiempo retardado”  $t$  para observadores en diferentes valores de  $z$



# Bibliografía

---

- [1] K.-H. Anthony, A new approach to thermodynamics of irreversible processes by means of lagrange-formalism, in *Disequilibrium and Self-Organisation*, pp. 75–92, Springer, Holanda, 1986. [1](#)
- [2] F. Viniegra Heberlen, *Mecánica (libro 2)* (Las prensas de ciencias, UNAM, México, 2008). [1](#), [6](#), [17](#)
- [3] L. Landau and E. Lifshitz, *Curso abreviado de física teórica (libro 1)* (Mir, Moscú, URSS, 1971). [1](#), [6](#), [7](#)
- [4] E. Noether, *Transport Theory and Statistical Physics* **1** (**3**), 183 (1971). [2](#), [17](#)
- [5] L. Lederman and C. T. Hill, *Symmetry and the beautiful universe* (Prometheus, EU, 2004). [2](#), [17](#)
- [6] H. Kleinert, *Particles and quantum fields* (World Scientific, Singapur, 2015). [2](#), [17](#)
- [7] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell* (Princeton University Press, EU, 2003). [2](#)
- [8] I. Podlubny, *Fractional Differential equations* (Academic Press, EU, 1999). [2](#), [25](#)
- [9] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations* (Elsevier, Holanda, 2006). [2](#), [27](#)
- [10] R. Hilfer, *Applications of fractional calculus in physics* (World Scientific, Singapur, 2000). [2](#), [25](#), [26](#), [27](#)
- [11] D. Baleanu and O. P. Agrawal, *Czechoslovak journal of physics* **56**, 1087 (2006). [2](#), [27](#)
- [12] G. S. Frederico and D. F. Torres, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **334**, 834 (2007). [2](#), [27](#)
- [13] A. B. Malinowska, *Applied Mathematics Letters* **25** (**11**) (2012). [2](#), [27](#)
- [14] M. Duarte Ortigueira, *International Journal of Mathematics* (2006). [2](#), [32](#)
- [15] M. Duarte-Ortigueira, *Fractional Calculus for scientists and engineers* (Springer, Holanda, 2011). [3](#), [25](#), [27](#), [28](#), [31](#), [33](#)
- [16] Y. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons (From fiber optics to photonic crystals)* (Academic Press, EU, 2003). [3](#), [11](#)
- [17] J. Fujioka Rojas, *NLS: Una introducción a la ecuación no lineal de Schrödinger* (Serie FENOMECA, UNAM, México, 2003). [3](#), [4](#), [13](#), [14](#)



- [18] V. Karpman, *Physics Letters A* **193**, 355 (1994). [3](#), [29](#)
- [19] J. F. A. E. R. Rodríguez, *Physics Letters A* **374** (2010). [3](#), [27](#), [29](#), [40](#)
- [20] M. Velasco Juan, El comportamiento de los solitones ópticos a partir de derivadas fraccionaria centradas, Tesis de licenciatura, UNAM, México, 2015. [3](#), [27](#), [32](#), [33](#), [41](#), [57](#)
- [21] C. Lanczos, *The variational principles of mechanics* (University of Toronto Press, Canadá, 1949). [5](#), [6](#)
- [22] A. Sommerfeld, *Mechanics (lectures on theoretical physics, vol 1)* (Academic Press, EU, 1964). [6](#)
- [23] L. Elsgoltz, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional* (MIR, Moscú, URSS, 1969). [7](#)
- [24] P. Drazin and R. Johnson, *Solitons: An Introduction* Cambridge Computer Science Texts (Cambridge University Press, Reino Unido, 1989). [11](#)
- [25] T. Tao, *Bulletin of the american mathematical society* **46**, 1 (2009). [13](#)
- [26] G. P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics* (Academic Press, EU, 2007). [14](#), [29](#)
- [27] N. Corporation, Secrets of submarine cables, 2012, URL: <http://www.nec.com/en/global/about/mitatv/01/2.html> recuperado el 16 de Noviembre de 2015. [14](#)
- [28] P. Bayvel, *Phil. Trans. R. soc. Lond. A* **358**, 303 (2000). [14](#)
- [29] R. Kumar and M. Tiwari, No publicado (2005), URL: <http://www.optics.unm.edu/sbahae/physics555/termpapers05/kumar-tiwari-solitons.pdf> recuperado el 19 de noviembre de 2015. [14](#)
- [30] A. Hasegawa and F. Tappert, *Applied Physics Letters* **23**, 142 (1973). [14](#)
- [31] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, and J. P. Gordon, *Physical Review Letters* **45**, 1095 (1980). [14](#)
- [32] Y. Kosmann-Schwarzbach, *The Noether Theorems (Invariance and conservation Laws in the Twentieth Century)* (Springer, EU, 2011). [17](#)
- [33] N. K. Glendenning, *Compact stars: Nuclear physics, particle physics and general relativity* (Springer Science & Business Media, Nueva York, EU, 2012). [17](#)
- [34] F. Riewe, *Physical review E* **55** (2), 1890 (1996). [26](#), [27](#)
- [35] R. Rodríguez F., J. Fujioka Rojas, A. Espinoza, and S. Gonzáa lez, *Recen Res. Devel. Physics* **8**, 145 (2009). [27](#)
- [36] O. P. Agrawal, *Mathematical Analysis and Applications* **272**, 368 (2002). [27](#)
- [37] J. Fujioka Rojas, *Journal of pyhsics A: Mathematical and theoretical* **47** (2014). [27](#)
- [38] J. Diaz and T. Osler, *Mathematics of Computation* **28** (125) (1974). [28](#)
- [39] A. Kilbas, O. Marichev, and S. Samko, *Gordon and Breach* **1** (1993). [28](#)
- [40] M. Duarte-Ortigueira, *IEEE Circuits and Systems Magazine* **8** (3), 19 (2008). [28](#)
- [41] M. Chen and W. Deng, *Wsld operators: A class of fourth order difference approximations for space riemann-liouville derivative*, 2013. [32](#), [37](#)